TEMA 11 – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 1 : Representa gráficamente la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{18}-\dfrac{x^2}{12}-2x$

Solución:

- Dominio = **R**
- Simetrías: $f(-x)=\dfrac{-x^3}{18}-\dfrac{x^2}{12}+2x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.
- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2}{18}-\frac{2x}{12}-2=\frac{x^2}{6}-\frac{x}{6}-2=\frac{x^2-x-12}{6}$$

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; x^2-x-12=0 \;\rightarrow\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=-3 \\ x=4 \end{cases}$$

Puntos singulares: $\left(-3,\dfrac{-15}{4}\right);\ \left(4,\dfrac{-52}{9}\right)$

- Cortes con los ejes:

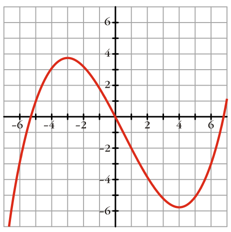
- Con el eje Y $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ Punto (0, 0)

- Con el eje X $\rightarrow$ $y=0 \rightarrow x\left(\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{x}{12}-2\right)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2x^2-3x-72=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+576}}{4}=\dfrac{3\pm\sqrt{585}}{4} \;\rightarrow\; \begin{cases} x\approx-5{,}3 \\ x\approx 6{,}8 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (–5,3; 0) y (6,8; 0)

- Puntos de inflexión: $f''(x)=\dfrac{2x-1}{6};\ f''(x)=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{2} \;\rightarrow$ Punto $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-73}{72}\right)$
- Gráfica:



EJERCICIO 2 : Dibuja la gráfica de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$

Solución:

- Dominio = **R** – {0}
- Simetrías: $f(-x)=-f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.
- Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}$ $x=0$ es asíntota vertical.
- Asíntota horizontal: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\ \ (\text{si } x\to-\infty,\ f(x)<0) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\ \ (\text{si } x\to+\infty,\ f(x)>0)\end{array}\right\}$ $y=0$ es asíntota horizontal.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x^3-(x^2-1)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2x^4-3x^4+3x^2}{x^6}=\frac{-x^4+3x^2}{x^6}=\frac{x^2(-x^2+3)}{x^6}=\frac{3-x^2}{x^4}$$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; 3-x^2=0 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{3}$

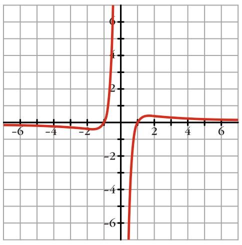
Signo de $f'(x)$:

$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$		$f'<0$
$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty,\,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\,+\infty)$; es creciente en $(-\sqrt{3},\,0)\cup(0,\,\sqrt{3})$.

Tiene un mínimo en $(-\sqrt{3};\,-0{,}38)$ y un máximo en $(\sqrt{3};\,0{,}38)$.

- Cortes con los ejes:
- No corta al eje Y, pues en $x=0$ no está definida.
- Con el eje X $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $x^2-1=0$ $\rightarrow$ $x=\pm1$ $\rightarrow$ Puntos $(-1,\,0)$ y $(1,\,0)$.
- Gráfica:



EJERCICIO 3 : Estudia la siguiente función y dibuja su gráfica: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R}-\{-1,\,1\}$
- Simetrías: $f(-x)=-f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.
- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\; x=-1 \text{ es asíntota vertical.}\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\; x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntota oblícua: $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ $\rightarrow$ $y=x$ es asíntota oblícua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x)-x<0$ si $x\to-\infty$ (curva por debajo).

$f(x)-x>0$ si $x\to+\infty$ (curva por encima).

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-3)=0 \;\rightarrow\; x=0,\; x=-\sqrt{3},\; x=\sqrt{3}$

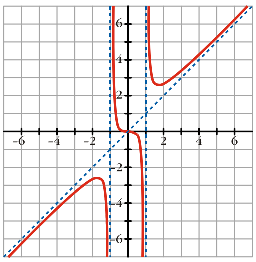
Signo de $f'(x)$:

$f'>0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'>0$
$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	0	$\searrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,\,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\,+\infty)$; es decreciente en $(-\sqrt{3},\,-1)\cup(-1,\,0)\cup(0,\,1)\cup(1,\,\sqrt{3})$

Tiene un máximo en $(-\sqrt{3};\,-2{,}6)$; un punto de inflexión en $(0,\,0)$ y un mínimo en $(\sqrt{3};\,2{,}6)$.

- Solo corta a los ejes en el punto $(0,\,0)$.
- Gráfica:



<u>EJERCICIO 4</u> : Representa la función: $f(x) = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{4}$

Solución:

- Dominio = **R**
- Simetrías: $f(-x) = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{4}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.
- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{4} = 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2(x-2) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos singulares: } (0,\,0) \text{ y } (2,\,-4)$$

- Cortes con los ejes:

- Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow$ Punto $(0,\,0)$

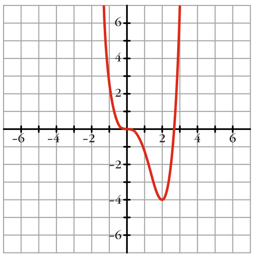
$$\text{- Con el eje X} \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x^3(3x-8) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{8}{3} \end{cases} \rightarrow \text{ Puntos } (0,\,0) \text{ y } \left(\frac{8}{3},\,0\right)$$

- Puntos de inflexión:

$f''(x) = 9x^2 - 12x = 3x\,(3x-4)$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = \frac{4}{3} \;\rightarrow\; \text{Puntos } (0,\,0) \text{ y } \left(\frac{4}{3},\,\frac{-64}{27}\right)$$

- Gráfica:



<u>EJERCICIO 5</u> : Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función:
$f(x) = -2 + \cos^2 x,\; x \in [0,\,2\pi]$ **Utilizando la información obtenida, represéntala gráficamente.**

Solución:

- Dominio = $[0,\,2\pi]$
- Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = -1 \;\rightarrow$ Punto $(0,\,-1)$
- Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; -2 + \cos^2 x = 0 \;\rightarrow\; \cos^2 x = 2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \cos x = \pm\sqrt{2} \;\rightarrow$ No tiene solución $\Rightarrow$ No corta al eje *X*.

- Máximos y mínimos: $f'(x) = 2\cos x\,(-\operatorname{sen} x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$

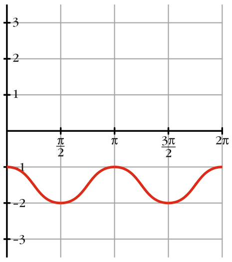
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2\cos x \operatorname{sen} x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \cos x = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2},\; x = \dfrac{3\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = \pi,\; x = 2\pi \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f''(x) = -2\,[\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x]$ en esos puntos:

$y'' < 0$ en $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi \Rightarrow$ Máximos: $(0,\,-1)$, $(\pi,\,-1)$, $(2\pi,\,-1)$

$$y'' > 0 \text{ en } x = \frac{\pi}{2} \text{ y } x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{Mínimos: } \left(\frac{\pi}{2},\,-2\right);\; \left(\frac{3\pi}{2},\,-2\right)$$

- Gráfica:



<u>EJERCICIO 6</u> : Estudia y representa esta función: $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$

Solución:

- Dominio = $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$
- Asíntotas:

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty \;\to\; x=-1$ es asíntota vertical. $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty \;\to\; x=2$ es asíntota vertical.

$$\text{Asíntotas horizontales}\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{-x-2}{-x+1}\right)=\ln 1=0 \quad (f(x)>0)\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=\ln 1=0 \quad (f(x)<0)\end{cases}$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x-2}{x+1}}\cdot\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)}{(x-2)}\cdot\frac{(x+1-x+2)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x-2)\,(x+1)}$$

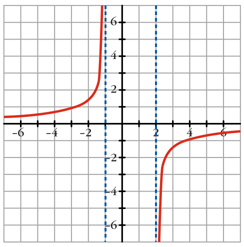
$f'(x)\neq 0$ para todo x.

Signo de $f'(x)$:

$$\underset{\nearrow}{f'>0}\quad -1 \quad \text{no existe} \quad 2 \quad \underset{\nearrow}{f'>0}$$

$f(x)$ es creciente en su dominio.

- No corta a los ejes.
- Gráfica:



<u>EJERCICIO 7</u> : Representa la siguiente función: $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

Solución:

- Dominio = **R**
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \;\to\; y=0$ es asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$ $(y>0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty;\;\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty \;\to\;$ Rama parabólica.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

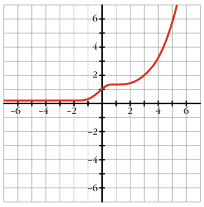
$$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\,(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; x=1$

$f'(x)>0$ para todo $x\neq 1 \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente.

Hay un punto de inflexión en $\left(1,\ \frac{e}{2}\right)$.

- Corta al eje Y en $(0, 1)$. No corta al eje X.
- Gráfica:



<u>EJERCICIO 8</u> : Estudia y representa la función: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$

Solución:

- Dominio $=(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$
- Simetrías: $f(-x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

  No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.
- Asíntotas:

  Asíntotas verticales:

  $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty \;\rightarrow\; x=-2$ es asíntota vertical. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \;\rightarrow\; x=0$ es asíntota vertical.

  Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow$

  $y=0$ es asíntota horizontal ($f(x)>0$ para todo x).
- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento: $f(x)=\left(x^2+2x\right)^{-1/2}$

  $$f'(x)=\frac{-1}{2}\left(x^2+2x\right)^{-3/2}\cdot(2x+2)=\frac{-(x+1)}{\sqrt{\left(x^2+2x\right)^3}}$$

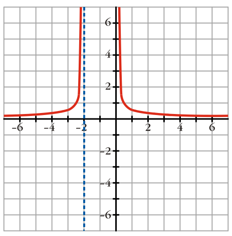
  $f'(x)=0 \;\rightarrow\; x=-1$ (no vale; pues $f(x)$ no está definida en $x=-1$).

  $f(x)$ no tiene puntos singulares.

  Signo de $f'(x)$:

$f'>0$ ↗	-2	no existe	0	$f'<0$ ↘

  $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$.
- $f(x)$ no corta a los ejes.
- Gráfica:



<u>EJERCICIO</u> : Representa gráficamente la siguiente función: $f(x)=(1-x)\,e^x$

Solución:

- Dominio = **R**
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{e^{x}} = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ ($y > 0$).

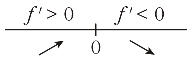
Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \;\to\;$ Rama parabólica.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = -e^{x} + (1-x)\,e^{x} = (-1+1-x)\,e^{x} = -x\,e^{x}$

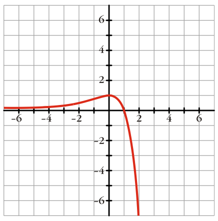
$f'(x) = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$; es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, 1)$.

- Puntos de corte con los ejes:
- Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 1 \;\to\;$ Punto $(0, 1)$
- Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x = 1 \;\to\;$ Punto $(1, 0)$
- Gráfica:



<u>EJERCICIO</u> : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

Solución:

- Dominio = **R** – {–2, 2}
- Simetrías: $f(-x) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.
- Asíntotas verticales:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -2$ es asíntota vertical.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ es asíntota vertical.

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 \;\to\; y = -1$ es asíntota horizontal.

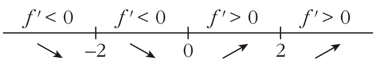
Si $x \to -\infty$ y si $x \to +\infty$, $f(x) < -1 \;\to\;$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2x\left(x^2-4\right) - \left(1-x^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; es creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Tiene un mínimo en $\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$.

- Cortes con los ejes:

- Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = -\dfrac{1}{4} \;\to\;$ Punto $\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$

- Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; 1 - x^2 = 0 \;\to\; x = -1;\; x = 1 \;\to\;$ Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

- Gráfica: