

TEMA 10 – APLICACIONES DE LA DERIVADA

RECTA TANGENTE

EJERCICIO 1 : Julio 10-11. Obligatoria (1,5 ptos)

Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x + \ln x$ en el que la recta tangente a $f(x)$ es perpendicular a la recta $x + 3y = 1$

EJERCICIO 2 : Junio 10-11. Obligatoria (1 pto)

Contesta razonadamente si, para la función $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$ existe algún punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es perpendicular a la recta $2x - y + 2 = 0$.

EJERCICIO 3 : Junio 01-02. Obligatoria (1 pto)

Calcula un punto del intervalo $[1,3]$ en el que la recta tangente a la curva $y = x^2 - x + 2$ es paralela a la cuerda que une los puntos $A = (1,2)$ y $B = (3,8)$

EJERCICIO 4 : Septiembre 99-00 Obligatoria (1 pto)

Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ es perpendicular a la recta $y = \frac{x}{3} + 1$

EJERCICIO 5 : Junio 97-98 Optativa (4 ptos)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Halla los valores de a y de b para que la función sea derivable en todo \mathbb{R} .
- Tomando $a = 4$ y $b = 3$, halla los puntos de la curva en los que la recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A = (-3, f(-3))$ y $B = (2, f(2))$

PROBLEMAS CON PARÁMETROS

EJERCICIO 6 : Septiembre 09-10. Optativa (3 ptos)

Encuentra los valores a , b , c para los que la función: $f(x) = a \cdot \ln x + bx + cx^2$ tiene en el punto $(1,0)$ un mínimo relativo y cumple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$

EJERCICIO 7 : Junio 98-99 Optativa (1 pto)

Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

EJERCICIO 8 : Junio 03-04. Optativa (3 ptos)

Halla el valor que deben tomar los parámetros a , b y c para que la curva $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1,4)$, $(2,9)$ y $(-3,24)$.

EJERCICIO 9 : Junio 06-07. Optativa (1,5 ptos)

Determina a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 2$ tenga un mínimo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 1/3$.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

EJERCICIO 10 : Junio 10-11. Optativa (3 pts)

Con una cuerda de 2 metros queremos construir un cuadrado de lado ℓ y un círculo de radio r de modo que la suma de sus áreas sea mínima. ¿Cuánto deben medir ℓ y r ?

EJERCICIO 11 : Septiembre 02-03. Optativa (3 pts)

Calcula las dimensiones del triángulo isósceles, inscrito en una circunferencia de radio 1, que tiene área máxima.

EJERCICIO 12 : Junio 02-03. Optativa (3 pts)

Una caja con tapa y base cuadrada debe tener un volumen de 160 cm^3 . El precio del material utilizado para la base es de 3 euros por cm^2 y el utilizado para los lados y la tapa es de 2 euros por cm^2 . Calcula las dimensiones de la caja para que resulte lo más económica posible.

EJERCICIO 13 : Septiembre 01-02. Obligatoria (1 pto)

Un número más el cuadrado de otro suman 48, ¿cómo deben elegirse estos números para que su producto sea máximo?

EJERCICIO 14 : Septiembre 00-01. Optativa (3 pts)

Se desea fabricar una lata de conservas en forma de cilindro circular con ambas tapas de área total 150 cm^2 . Calcula el radio y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

EJERCICIO 15 : Junio 00-01 Optativa (3 pts)

Halla el punto de la parábola $y = 27 - x^2$, situado en el primer cuadrante, tal que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en ese punto y los ejes coordenados tenga área mínima? (Obtener el punto y el valor del área)

EJERCICIO 16 : Septiembre 99-00 Obligatoria (3 pts)

Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 10 m y la altura relativa a ese lado de 6m. Encuentra un punto sobre la altura tal que la suma de las distancias de dicho punto a los tres vértices sea mínima.

EJERCICIO 17 : Junio 99-00 Obligatoria (1 pto)

Calcula el rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio $r > 0$.

EJERCICIO 18 : Junio 98-99 Optativa (2 pts)

Calcula las dimensiones de una caja sin tapa de base cuadrada que tiene una capacidad de 500 cm^3 construida con la menor cantidad de cartón posible.

EJERCICIO 19 : Septiembre 97-98 Obligatoria (1 pto)

Calcula dos números reales cuya suma sea 6 y cuyo producto sea el mayor posible.

EJERCICIO 20 : Junio 97-98 Obligatoria (1 pto)

Un segmento de longitud 5 apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY de manera que forma con éstos un triángulo rectángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.

EJERCICIO 21 : Septiembre 96-97 Optativa (3 pts)

De todos los trapecios con tres lados de la misma longitud 1 (los dos lados no paralelos y la base menor). Determinar el trapecio de área máxima. Calcular esta área (Observación: la forma del trapecio depende de los ángulos de las bases)

EJERCICIO 22 : Junio 96-97 Optativa (3 pts)

De todos los conos que se pueden inscribir en una esfera de radio 12 cm., determinar las dimensiones del cono de volumen máximo.

EJERCICIO 23 : Junio 95-96 Optativa (3 pts)

Hallar las dimensiones del cono de revolución de volumen máximo generado por un triángulo isósceles de perímetro 2, al girar en torno a su altura.

LÍMITES**EJERCICIO 24** : Julio 11-12. Obligatoria (1,5 pts)

Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x \cdot \cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x}$

EJERCICIO 25 : Junio 11-12. Obligatoria (1,5 pts)

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{\sin^2 x}$

EJERCICIO 26 : Septiembre 08-09. Optativa (3 pts)

Calculad, si existen, los siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x + e^x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x - e^x}{x^2}$

EJERCICIO 27 : Septiembre 06-07. Obligatoria (1, 5 pts)

Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x}$

EJERCICIO 28 : Junio 05-06. Optativa (1 pts)

Calcula, si existen, el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\lg x}$

EJERCICIO 29 : Junio 04-05. Obligatoria (1 Pto)

Calcula $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(\pi x)}{x}$

EJERCICIO 30 : Septiembre 03-04. Obligatoria (1,5 pts)

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x}$

EJERCICIO 31 : Junio 01-02. Obligatoria (1 pto)

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$

EJERCICIO 32 : Junio 97-98 Obligatoria (1 pto)

Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

TEOREMAS DE DERIVABILIDAD

EJERCICIO 33 : Julio 11-12. Optativa (3 ptos)

Enuncia el Teorema de Bolzano y úsalo para probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene una única solución. Debes justificar adecuadamente por qué es única. (Puede serte útil dibujar las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \cos x$.)

EJERCICIO 34 : Junio 11-12. Optativa (3 ptos)

Enuncia el teorema de Rolle. Encuentra los ceros de la primera derivada de la función $f(x) = x^3 - 12x + a$. Usa finalmente la información previa para probar que, con independencia del valor de a , la ecuación $x^3 - 12x + a = 0$ no tiene dos soluciones distintas en el intervalo $[-2, 2]$.

EJERCICIO 35 : Septiembre 06-07. Obligatoria (1 pto)

Busca algún criterio que te permita afirmar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$. ¿Qué te dice ese criterio para el intervalo $(-1, 0)$? Razona la respuesta?

EJERCICIO 36 : Septiembre 00-01. Optativa (3 ptos)

Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ 3 \cos(x - 3) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- Estudia si es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$
- Razona si se puede asegurar que existe un punto c en el intervalo $[-2, 2]$ en el cual $f'(c) = 0$. Encuentra c si existe.