TEMA 6 y 7 - RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

ECUACIONES DE LA RECTA

Para hallar la ecuación de una recta en el espacio necesito:

- Dos puntos
- Un punto y su vector director

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y un vector $\vec{v} = (a,b,c)$.
Si me dan dos puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ $\Rightarrow$ Tomaremos uno de los mismos $A(x_0,y_0,z_0)$ y como vector $\vec{v} = \vec{AB} = (x_1- x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + k.(a,b,c) \qquad \forall\, k \in R$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases} \qquad \forall\, k \in R$

Ecuación continua: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Ecuación implícita (como intersección de dos planos): $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

ECUACIONES DE UN PLANO

Para hallar la ecuación de un plano en el espacio necesito:

- Tres puntos
- Un punto y dos vectores directores

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y dos vectores $\vec{v}_1 = (a_1,b_1,c_1)$, $\vec{v}_2 = (a_2,b_2,c_2)$
Si me dan tres puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2)$ $\Rightarrow$ Tomaremos uno de los mismos $A(x_0,y_0,z_0)$ y como vectores $\vec{v}_1 = \vec{AB} = (x_1- x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$

$\vec{v}_2 = \vec{AC} = (x_2- x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + s.(a_1,b_1,c_1) + t.\ (a_1,b_1,c_1) \qquad \forall\, s,t \in R$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + s.a_1 + ta_2 \\ y = y_0 + s.b_1 + tb_2 \\ z = z_0 + s.c_1 + tc_2 \end{cases} \qquad \forall\, s,t \in R$

Ecuación implícita o general: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; Ax + By + Cz + D = 0$$

Vector normal = $\vec{n} = (A,B,C) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (Es perpendicular a los dos vectores directores)
Nota: Si conocemos el vector normal y un punto podemos hallar directamente la ecuación general del plano. Del vector normal conocemos A, B y C ; y si sustituimos el punto hallamos D.

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Coincidentes Paralelas Secantes Se cruzan

Método: Escribimos las ecuaciones paramétricas de cada una de ellas (con distinto parámetro), las igualamos y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado ⇒ Existe una única solución ⇒ Se cortan en un punto ⇒ Secantes.
- Sistema compatible indeterminado ⇒ Existen infinitas soluciones ⇒ Se cortan en infinitos puntos ⇒ Coincidentes.
- Sistema incompatible ⇒ No existe solución ⇒ No se cortan ⇒ Paralelas o se cruzan.
    - Hallar el vector director de cada una
    - Si son paralelos (proporcionales) las rectas son paralelas
    - Si no son paralelos, las rectas se cruzan.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Coincidentes Paralelos Secantes

Método: Escribimos las ecuaciones generales de cada uno de ellos y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado ⇒ No puede ser
- Sistema compatible indeterminado ⇒ Existen infinitas soluciones ⇒ Se cortan en infinitos puntos ⇒ Se cortan en un plano o en una recta
    - Si hay un grado de libertad ⇒ Un vector ⇒ Se cortan en una recta ⇒ Secantes
    - Si hay dos grados de libertad ⇒ Dos vectores ⇒ Se cortan en un plano ⇒ Coincidentes
- Sistema incompatible ⇒ No existe solución ⇒ No se cortan ⇒ Paralelos.

POSICIÓN RELATIVA ENTRE RECTA Y PLANO

Recta Contenida en el plano Secantes Paralelos

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y la general del plano y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado ⇒ Existe una única solución ⇒ Se cortan en un punto ⇒ Secantes.
- Sistema compatible indeterminado ⇒ Existen infinitas soluciones ⇒ Se cortan en infinitos puntos ⇒ Recta contenida en el plano.
- Sistema incompatible ⇒ No existe solución ⇒ No se cortan ⇒ Paralelos.

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS

Coincidentes	Dos coincidente y el otro secante	Dos coincidentes y el otro paralelo	Paralelos	Paralelos
Dos paralelos Y el otro secante	Secantes en una recta	Secantes en un punto	Secantes 2 a 2 en una recta	

Escribimos las ecuaciones de los tres planos en forma general y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto
- Sistema compatible indeterminado:
  - Un grado de libertad: Se cortan en una recta
    - Dos planos coincidentes y el otro secante
    - Los tres se cortan en una recta
  - Dos grados de libertad: Se cortan en un plano $\Rightarrow$ Coincidentes
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución
  - Dos coincidentes y el otro paralelo
  - Tres paralelos
  - Dos paralelos y el otro los corta
  - Se cortan dos a dos en una recta

ÁNGULOS

ANGULO ENTRE DOS RECTAS

$$\text{Cos}\,(r_1,r_2) = \cos\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \frac{\left|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right|}{\left|\vec{v}_1\right| \cdot \left|\vec{v}_2\right|}$$

ANGULO ENTRE DOS PLANOS

$$\text{Cos}\,(\Pi_1, \Pi_2) = \cos\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right) = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}$$

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

$$\text{Sen}\,(r, \Pi) = \cos\left(\vec{v}_r, \vec{n}_\Pi\right) = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{v}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_\pi\right|}$$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$

$$D(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

$$D(P,r) = \frac{\left|\vec{PP_r} \times \vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|}$$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO: $P(x_0,y_0,z_0)$, Π: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$D(P, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

$$D(r,s) = \frac{\left|[v_r, v_s, P_rP_s]\right|}{|v_r \times v_s|}$$

DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

$D(r, \Pi) = d(P_r, \Pi)$

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

$D(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1, \Pi_2)$