TEMAS 6 Y 7 – RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

RECTAS Y PLANOS

EJERCICIO 1 : Halla el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano π: $3x - 2y - 4z + 2 = 0$.

EJERCICIO 2 : Halla la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ 2x-3z=5 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$ y es paralelo al plano que contiene a los puntos: A(1, 0, –3), B(2, 1, 4) y C(0, 2, 3)

EJERCICIO 3 : Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s, siendo: $r:\begin{cases} y=2z-4 \\ x=3z-8 \end{cases}$ $\quad s:\dfrac{x-10}{1}=\dfrac{y-20}{-1}=\dfrac{z}{1}$

EJERCICIO 4 : Se consideran las rectas: $r:\begin{cases} x-1=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases}$, $\quad s:\begin{cases} x-z-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

y el plano π, que pasa por los puntos A(1, 0, 2), B(2, 1, 2) y C(1, 0, 1).

a) Da la ecuación general o implícita de π.

b) Una de las dos rectas corta a π. Determínala.

c) Comprueba que la otra recta es paralela a π.

EJERCICIO 5 : Nos dan las rectas r, determinada por los puntos A(2, –1, 1), B(0, 1, –1), y s determinada por C(2, 0, –1) y D(2, 1, –1).

a) Escribe la ecuación general (o implícita) del plano paralelo a r y s que pasa por el origen de coordenadas.

b) Escribe la ecuación general del plano que pasa por B y es perpendicular a r.

EJERCICIO 6 : Halla la ecuación del plano que contiene a la recta: $r:\begin{cases} 2x-y+z-2=0 \\ x+3y-z+4=0 \end{cases}$

y al punto P(2, –3, 1). Explica el procedimiento.

EJERCICIO 7 : Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(2, 1, -3)$ y $P_2(4, 2, 1)$ y es perpendicular al plano: π: $2x - y - z + 3 = 0$

EJERCICIO 8 :

a) Obtén la ecuación del plano π que pasa por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ siendo P(2, 1, 0) y Q(0, 3, 4) y es perpendicular a dicho segmento.

b) El plano del apartado anterior corta a los ejes de coordenadas en los puntos A, B y C. Calcula el área del triángulo ABC.

EJERCICIO 9 : Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano: $2x - y + z - 4 = 0$

EJERCICIO 10 : Considera los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(4, -1, 3)$ y $C(2, 2, 1)$.
a) Prueba que son los vértices de un triángulo.
b) Calcula el área de dicho triángulo.

EJERCICIO 11 :
a) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3, -1, -1)$ y es perpendicular a $\vec{v}(1, 1, 1)$.
b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano anterior.

EJERCICIO 12 : Considera los puntos $P(2, 1, 1)$ y $Q(4, 5, 3)$.
a) Obtén la ecuación del plano que pasa por el punto medio de $\overrightarrow{PQ}$ y es perpendicular a este.
b) Calcula el volumen del tetraedro limitado por los ejes de coordenadas y el plano π.

EJERCICIO 13 : Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos (0,1,5) y (3,4,3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

EJERCICIO 14 : Dadas las rectas r: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$, hallar un punto de cada una de ellas, de tal forma que el vector que las una sea perpendicular a ambas.

EJERCICIO 15 : Encuentra la ecuación del plano perpendicular a la recta r: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ que pase por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 16 : Determinar la relación que debe existir entre a y b para que el punto P(0,a,b) esté en el plano determinado por los puntos A(1,0,0), B(1,1,1) y C(0,2,1).

EJERCICIO 17 : Sean las rectas $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y la determina por la intersección de los planos $x + y - z = 1$, $2x - y + z = 2$
a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelos a las dos rectas.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por (1,1,1) y es perpendicular al plano hallado.

EJERCICIO 18 :
a) Determina si los puntos A(-1,0,3), B(2,4,1) y C(-4,3,1) están alineados.
b) Expresa en dos formas diferentes la ecuación de la recta que pasa por A y B.

EJERCICIO 19 : Sea r la recta intersección de los planos $x + y + z = 2$ y $2x + 3y + z = 3$ Calcula un punto de la recta r, un vector direccional y las ecuaciones de r en forma paramétrica y en forma continua. Halla también la ecuación del plano que contiene a la recta y pasa por el punto (2,1,3)

EJERCICIO 20 : Dados el punto A(1,1,1) y la recta r: $\begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ calcula:
a) Un vector u director de la recta r.
b) El plano π que contiene a la recta r y al punto A
c) La recta s que pasa por el punto A, está contenida en el plano π anterior, y su dirección es perpendicular a la de la recta r.

EJERCICIO 21 : Sean P y Q los puntos de coordenadas P(a,b,0) y Q(1,2,3). ¿Existen valores de a y b para los cuales la recta que une P y Q contenga al punto R dado por R(0,0,1)? Razona la respuesta en caso negativo. Si la respuesta es positiva, calcula los valores de a y b.

EJERCICIO 22 : Calcula la ecuación paramétrica y la ecuación cartesiana (general) del plano que contiene a los puntos A, B y C de coordenadas A(1,0,0), B(0,1,1) y C(1,1,1). ¿Existe algún valor de u tal que el punto (3,2u,u+3) pertenezca al plano? Razonar la respuesta calculando el valor de u en caso de que sea afirmativa.

POSICIÓN RELATIVA

EJERCICIO 23 :

a) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-2y+2z=2 \end{cases} \quad y \quad s:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-10}=\frac{z}{-6}$$

b) Comprueba si los puntos $A(1,\ 0,\ -2)$ y $B(2,\ -10,-6)$ pertenecen a alguna de las rectas anteriores.

EJERCICIO 24 :

a) Investiga la posición relativa de las dos rectas siguientes en el espacio:

La primera está dada por $x-5=y-7=z$, y la segunda, por los planos:

$$\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ y-2z-7=0 \end{cases}.\ \text{Explica el procedimiento.}$$

b) Halla si es posible, el punto de intersección.

EJERCICIO 25 : Estudia la posición relativa de las rectas r_1 y r_2:

$$r_1:\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \qquad r_2:\begin{cases} x=-3\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}$$

Razona la respuesta.

EJERCICIO 26 : Consideramos las dos rectas: $r:\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$ $s:\frac{x+1}{2}=y+1=\frac{z+d}{-2}$

Halla el valor de d para que las rectas se corten. Halla el punto de intersección para el valor de d obtenido.

EJERCICIO 27 : Estudia la posición relativa de las siguientes rectas según los valores de k:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5} \quad y \quad s:\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-k}{3}$$

EJERCICIO 28 : Explica cuál ha de ser el valor de m que hace que el tercer plano de la siguiente familia contenga a la recta definida por los dos primeros. Los planos son: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ mx+10y+4z=11 \end{cases}$

EJERCICIO 29 : Considera las rectas: $r_1: \begin{cases} x+y=5 \\ y+z=2 \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} y=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ y $r_3: \begin{cases} x-y=1 \\ y-z=3 \end{cases}$

a) Demuestra que las rectas r_1 y r_2 se cortan en un único punto.
b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de r_1 y r_2, y es paralela a r_3.

EJERCICIO 30 : Considera los planos de ecuaciones $\pi_1 : x + 2y + z = 1$, $\pi_2 : px + y + pz = 1$ y $\pi_3 : px + y + 2z = 1$ donde p es un parámetro real.
a) ¿Para qué valores de p los tres planos se cortan en un único punto? Halla este punto cuando p = 1
b) ¿Hay algún valor de p que haga que la intersección común sea una recta? Si es así, escribe la ecuación vectorial de esta recta.
c) Describe la posición relativa de los tres planos cuando p = ½

EJERCICIO 31 : Determina la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r_1 : \begin{cases} 7x+5y-7z-12=0 \\ 2x+3z+11=0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 5x-5y-z-16=0 \\ 3x-2y-7=0 \end{cases}$$

EJERCICIO 32 : Discute, según los valores de a, la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan (no es necesario resolverlo)

$\Pi_1 \equiv (a + 1)x + y + z = 3$
$\Pi_2 \equiv x + 2y + az = 4$
$\Pi_3 \equiv x + ay + 2z = 2a$

ÁNGULOS

EJERCICIO 33 : Halla el ángulo que forma la recta $r: \begin{cases} 3x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

y el plano $\pi: 2x - y + 4z - 2 = 0$.

EJERCICIO 34 : En el espacio se consideran:
- La recta r intersección de dos planos de ecuaciones implícitas $x + y - z = 5$, $2x + y - 2z = 2$
- La recta s que pasa por los puntos P = (3, 10, 5) y Q = (5, 12, 6)

Calcular el ángulo α que determinan r y s

EJERCICIO 35 : Hallar el ángulo que determinan los planos: $\pi_1 : x+2y-z = 0$ y $\pi_2 : 2x-3z+7 = 0$

DISTANCIAS

EJERCICIO 36 : Halla la distancia de P(5, 3, –4) al plano $\pi: x + 3y - z + 5 = 0$.

EJERCICIO 37 : Calcula la distancia entre los planos siguientes:
$\pi: x - 3y + z - 10 = 0$ $\pi': 2x - 6y + 2z + 3 = 0$

EJERCICIO 38 : Dados los puntos P(1, 0, 2) y Q(2, –1, 0) y el plano $\pi: x + y + 2z - 1 = 0$, calcula:
a) La distancia entre P y Q.
b) La distancia de P a π.

EJERCICIO 39 : Calcula la distancia entre los planos siguientes:
$\pi: y + 3z = 0$ $\pi': 2y + 6z - 5 = 0$

EJERCICIO 40 : Calcula razonadamente la distancia del punto $P(3, -1, 5)$ a la recta siguiente:

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

EJERCICIO 41 : Calcula la distancia de $P(2, 1, -1)$ a la recta $r : (4\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$.

EJERCICIO 42 : Calcula la distancia del punto $P(1, -1, 2)$ a la recta siguiente: $r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

EJERCICIO 43 : Calcula la distancia de $P(1, 0, 2)$ a la recta $r : (2\lambda, -\lambda, 1 + \lambda)$.

EJERCICIO 44 : Calcula la distancia entre: $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = \quad \mu \end{cases}$

EJERCICIO 45 : Calcula la distancia entre las rectas r y s: $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -2 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$

EJERCICIO 46 : Considera las rectas r y s: $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Calcula la distancia entre ellas

EJERCICIO 47 : Halla los puntos de la recta r: $x - 1 = y + 2 = z$ que equidistan de los planos π_1. $4x - 3z - 1 = 0$ y $\pi_2 : 3x + 4y - 1 = 0$

EJERCICIO 48 : Hallar la distancia de la recta $r: \begin{matrix} x = 3 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -1 \end{matrix}$ al plano $\Pi: 2x + y - z = 4$

REPASO

EJERCICIO 49 :

Dados el punto $P(2, 1, -2)$, la recta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$, y el plano $\pi: 4x - 3y + 5 = 0$, calcula:

a) La distancia de P a π.
b) El ángulo formado por la recta r y el plano π.

EJERCICIO 50 :

Dados el punto $P(1, 0, -3)$, la recta $r: \begin{cases} x = 2 + m\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 + m\lambda \end{cases}$, y el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$, calcula:

a) El valor de m para que r sea paralela a π.
b) La distancia de P a π.

EJERCICIO 51 :
a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, 1, -1)$ y es paralela a los planos π_1: $x + 2y - z - 2 = 0$, π_2: $2x + y + 2z - 1 = 0$.
b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

EJERCICIO 52 :
a) Halla el ángulo que forman las rectas: $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \ \ -2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$ y $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$
b) Obtén la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

EJERCICIO 53 :
a) Determina la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(1, -2, 0)$ y es perpendicular a la recta r:$\{x + y = 0,\ \ y - 3z + 2 = 0\}$.
b) Halla el ángulo que forman los planos siguientes: π_1: $x + y = 0$ π_2: $y - 3z + 2 = 0$

EJERCICIO 54 : Dadas las rectas: $r_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$, $r_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$ Halla:
a) La ecuación del plano que pasa por la segunda y es paralelo a la primera.
b) La distancia entre ambas rectas.

EJERCICIO 55 : Dadas las rectas: $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \ \ 2\lambda \\ z = -2 \end{cases}$ y $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ Halla:
a) La distancia entre las rectas. b) La recta perpendicular a r y s.

EJERCICIO 56 : Los puntos $P(0, 2, 0)$ y $Q(2, 1, -1)$ son dos vértices de un triángulo,y el tercero, S, pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \ \ -\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.
a) Determina las coordenadas de S. b) Calcula el área del triángulo PQS.

EJERCICIO 57 : Considera el plano $2x - y + z - 4 = 0$.
a) Halla los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.
b) Calcula el área del triángulo formado por estos tres puntos.

EJERCICIO 58 : $A(0, 1, 2)$, $B(0, 2, 3)$ y $C(0, 2, 5)$ son tres vértices de un tetraedro. El cuarto vértice, D, está sobre la recta: $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ Halla las coordenadas de D para que el volumen del ortoedro sea 2 unidades cúbicas.

EJERCICIO 59 : Calcula el volumen de un cubo que tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ y otro sobre la recta $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$.

EJERCICIO 60 : Halla el punto simétrico de $P(2, 1, 0)$ respecto del plano π: $2x - y + z = 2$.

EJERCICIO 61 : Determina el punto simétrico de A(2, 1, 4) respecto de la recta: $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

EJERCICIO 62 : Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos A(–2, 0, 0) y B(2, 0, 0) es 106. Identifica la figura resultante.

EJERCICIO 63 : Considera los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$; $x + y - z = 2$
a) Determina la recta que pasa por el punto A(1,2,3) y no corta a ninguno de los planos dados.
b) Determina los puntos que equidistan de A(1,2,3) y B(2,1,0) y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

EJERCICIO 64 : Considera la recta r: $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ y el plano π: $3x + 4y - 6 = 0$
a) Comprueba que r y π son paralelos. b) Calcula la distancia entre r y π
c) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en π y sean paralelas a r.

EJERCICIO 65 : Determina la ecuación de un plano, π, paralelo al plano de ecuación $x - y + z + 2 = 0$ y que dista 20 unidades del punto P(0, 2, 3).

EJERCICIO 66 : Considera los puntos A(1,1,1), B(2,0,-1), C(5,2,1) y D(4,3,3)
a) Justifica que los puntos son los vértices consecutivos de un paralelogramo.
b) Razona si dicho paralelogramo es un rectángulo.
c) Determina una ecuación general del plano que contiene a los cuatro puntos.

EJERCICIO 67 : Dados los planos α: $x + y - z = 1$ y β: $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t \\ z = 2 + s \end{cases}$ $\forall$ t,s $\in$ R, se pide:
a) Determina su posición relativa. b) Calcula la distancia entre ellos.

EJERCICIO 68 : Sea el plano π: $x + y - 2z - 5 = 0$ y la recta r: $x = y = z$, se pide:
a) Calcula la distancia de la recta al plano.
b) Hallar un plano que contenga a r y sea perpendicular a π.
c) Hallar el punto simétrico de P(-1,3,3) respecto de π

EJERCICIO 69 : Dadas las dos recta r y s, que se cortan, de ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$$ se pide calcular:

a) El punto P de corte de las rectas r y s.
b) Un vector direccional de r y otro de s y el ángulo α que forman las rectas r y s en el punto de corte P.
c) La ecuación implícita $ax + by + cz + d =$ del plano π que contiene a las rectas r y s.

EJERCICIO 70 : Dados el punto Q(3,-1,4) y la recta r de ec. paramétrica r: $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ se pide:
a) Hallar la distancia del punto Q a la recta r.
b) Justifica que la recta s que pasa por Q y tiene $\vec{a}$ (1,-2,1) como vector direccional no corta a r.
c) Calcular la distancia entre las recta r y s

EJERCICIO 71 :
a) Los puntos A(1,1,0), B(0,1,1) y C(-1,0,1) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD. Calcula las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo.
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto B(0,1,1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y C(-1,0,1).

EJERCICIO 72 : Dadas las rectas r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$ s: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$

a) Estudiar su posición relativa. b) Calcula la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

EJERCICIO 73 : Considera el triángulo de vértices A(0,0,1), B(2,0,0) y C(1,1,1), ¿Cuál es la intersección de los (tres) planos que pasan por cada vértice siendo perpendiculares a la recta determinada por los otros dos vértices?

EJERCICIO 74 : Halla la ecuación continua de la recta formada por todos los puntos que equidistan de P(1,-1,0), Q(-1,3,2) y R(3,1,-2)

EJERCICIO 75 : Dada la recta r: $\begin{cases} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano π: x + y – 2 = 0

a) Determina su posición relativa
b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

EJERCICIO 76 : Dados el punto A(1,-2,-3), la recta r: $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano π: x–2y–3z+1= 0

a) Escribe la ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.
b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π

EJERCICIO 77 : Sean los puntos A(λ,2,λ), B(2,-λ,0), C(λ,0,λ+2)
a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?
b) Comprobar que si A, B, C no están alineados el triángulo que forman es isósceles
c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

EJERCICIO 78 : Un helicóptero situado en el punto P(1,2,1) quiere aterrizar en el plano π: x+y+3z=0
a) Calcula la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que le lleva al punto más cercano del plano π.
b) Calcula dicho punto c) Calcula la distancia que deberá recorrer.

EJERCICIO 79 : Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(1,1,0) y corta a las rectas: $r_1 : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{2}$ y $r_2 : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 3x + y - z + 8 = 0 \end{cases}$

EJERCICIO 80 : Escribe las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector (1,-1,0) y que pasa por P’, siendo P’ el simétrico de P(0,-2,0) respecto al plano π: x + 3y + z = 5