

TEMAS 6 Y 7 – GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

EJERCICIO 1 : Julio 11-12. Optativa (3 pts)

Para los puntos A(1,0,2) y B(-1,2,4) y la recta r de ecuación $\frac{x+2}{2} = y-1 = \frac{z-1}{3}$

- Calcula la ecuación del plano Π formado por los puntos que equidistan (están a la misma distancia) de A y de B.
- Calcula la ecuación del plano Π' paralelo a r que pase por A y B.
- Encuentra otro plano Π'' de modo que la intersección de Π , Π' y Π'' sea exactamente un punto.

EJERCICIO 2 : Junio 11-12. Optativa (3 pts)

Prueba que para cualquier valor de $a \neq 0$, los planos $x + ay - az = 0$ y $-x + 2ay - 2az = 0$ se cortan en una recta r. Calcula la posición relativa de r respecto del plano que pasa por el origen de coordenadas y los puntos A(1,0,-6) y B(0,2,a+3) (se supone que $a \neq 0$ para que r esté definida).

EJERCICIO 3 : Julio 10-11. Obligatoria (1,5 pts)

Encuentra un vector perpendicular al plano de ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3\lambda + \mu \\ y &= 4 + 5\lambda - \mu \\ z &= -3 + 4\lambda + 2\mu \end{aligned}$$

EJERCICIO 4 : Julio 10-11. Optativa (3 pts)

Determina una ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{5}$ y es paralelo a la recta

$\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$. Encuentra tres puntos no alineados dentro del plano que has dado.

EJERCICIO 5 : Julio 10-11. Optativa (3 pts)

Si a, b son dos parámetros no nulos, encuentra la relación que se debe dar entre ambos para que los puntos A(1,0,0), B(a,b,0), C(a,0,b) y D(0,a,b) estén en el mismo plano. Determina la ecuación del plano que contiene a los cuatro puntos.

EJERCICIO 6 : Junio 10-11. Optativa (3 pts)

Calcula la ecuación de una recta r paralela al plano que pasa por los puntos A(1,1,0), B(0,1,1) y C(1,0,1) y al plano de ecuación $x + 2y + 3z = 1$ y que no esté contenida en ninguno de ellos.

EJERCICIO 7 : Junio 10-11. Optativa (3 pts)

La recta r de ecuación $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s que pasa por los puntos P(1,0,2) y Q(a,1,0) se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

EJERCICIO 8 : Septiembre 09-10 Obligatoria (1,5 pts)

Determina para qué valores de a la recta $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y + 3z = a \end{cases}$, y el plano de ecuación $3x + az = 4$ son paralelos.

EJERCICIO 9 : Septiembre 09-10. Optativa (3 pts)

Calcula la distancia del punto (3,-1,3) a la recta

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$
EJERCICIO 10 : Septiembre 09-10. Optativa (3 pts)

Sean r, s las rectas en el espacio dadas, respectivamente, por:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ x + 2y - 3z = a \end{cases}$$

Calcula para qué valores de a las rectas se cortan en un punto. Halla dicho punto.

Estudia la posición relativa que tienen las rectas para el resto de valores de a.

EJERCICIO 11 : Junio 09-10. Obligatoria (1,5 pts)

Si r es la recta que pasa por el punto P = (1,-1,1) y tiene como vector director (1,2,-2), ¿existe algún valor de a para el cual la recta r está contenida en el plano $2x + 3y + 4z = a$? En caso afirmativo, encuentra el valor de a. En caso negativo, razona tu respuesta.

EJERCICIO 12 : Junio 09-10. Optativa (3 pts)

Determina los valores de a y b para que los puntos P = (1, 0, 1) y Q = (1/3, a, b) sean simétricos respecto del plano $x - y + z = 1$. (Recuerda que dos puntos se dicen simétricos respecto de un plano si están en una recta perpendicular al plano y a la misma distancia de éste).

EJERCICIO 13 : Septiembre 08-09. Obligatoria (1 pto).

Calculad un punto y un vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

EJERCICIO 14 : Septiembre 08-09. Optativa (3 pts)

Las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z - 14 = 0 \\ x - 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x + y - z - a = 0 \\ x + y + az - 6 = 0 \end{cases}$$

se cortan en un punto. Calculad todos los posibles valores del parámetro a y los respectivos puntos de corte.

EJERCICIO 15 : Junio 08-09. Obligatoria (1,5 pts)

Hallad para qué valores de a la distancia entre el punto (1,2,1) y el plano de ecuación $3x + 4y + az + 3 = 0$ es 2

EJERCICIO 16 : Junio 08-09. Optativa (3 pts)

Calculad una ecuación del plano que pasa por los puntos (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2). Calculad una ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,0,-1) y (1,-1,0). Determinad la posición relativa de la recta y el plano.

EJERCICIO 17 : Junio 08-09. Optativa (3 pts)

Determinad a y b para que los planos de ecuaciones: $x - y + z = 1$, $2x - 3y + z = 0$, $ax - 4y + 2z = b$ se corten en una recta r. Dad un punto y un vector director para r.

EJERCICIO 18 : Septiembre 07-08. Optativa (3 ptos)

Hallad la distancia entre el punto $(1,-1,1)$ y el plano que pasa por los tres puntos $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$.

EJERCICIO 19 : Septiembre 07-08. Obligatoria (1,5 ptos)

Sea r la recta: $r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 5z - 21 = 0 \\ x + y - z - 8 = 0 \end{cases}$ Buscad un punto y un vector direccional de r , y calculad sus ecuaciones en forma paramétrica y en forma continua.

EJERCICIO 20 : Junio 07-08. Optativa (3 ptos)

Consideramos el plano de ecuación $3x + ay + 4z = 1$ y la recta que pasa por los puntos $(2,0,-1)$ y $(-2,1,2)$. Discutid, según los valores de a , la posición relativa de la recta y el plano. Hallad, en los casos en que sean paralelos, la distancia entre la recta y el plano.

EJERCICIO 21 : Junio 07-08. Obligatoria (1 pto)

Calculad una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,-1)$ y es perpendicular a la recta

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 22 : Septiembre 06-07. Optativa (3 ptos)

Averigua para qué valor de m la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y + 5 = m \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$ se cortan con la recta

$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$. Calcula el coseno del ángulo que forman ambas rectas

EJERCICIO 23 : Septiembre 06-07. Optativa (3 ptos)

Determina a y b para que los planos: $x + y + z = 2$ $2x + 3y + z = 3$ $ax + 10y + 4z = b$ se corten en una recta r . Da algún tipo de ecuaciones para r (las que quieras).

EJERCICIO 24 : Junio 06-07. Optativa (3 ptos)

Sea r la recta intersección de los planos

$$x + y + z = 2, \quad 2x + 3y + z = 3$$

Calcula un punto de la recta r , un vector direccional y las ecuaciones de r en forma paramétrica y en forma continua. Halla también la ecuación del plano que contiene a la recta y pasa por el punto $(2,1,3)$.

EJERCICIO 25 : Septiembre 05-06. Optativa (3 ptos)

Halla el simétrico del punto $P = (1,0,2)$ respecto al plano $y - 2z + 1 = 0$

EJERCICIO 26 : Septiembre 05-06. Optativa (3 ptos)

Determina si los vectores directores de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 2z + 4 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - 2y - 5z + 7 = 0 \\ 3x + 4y - 6z + 9 = 0 \end{cases}$$

son o no perpendiculares

EJERCICIO 27 : Junio 05-06. Obligatoria (1 pto)

Estudia la posición relativa de las rectas r y s dadas por $r \equiv x = y = z$ $s \equiv \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

En particular, ¿Son perpendiculares o paralelas?

EJERCICIO 28 : Septiembre 04-05. Optativa (3 ptos)

Sean los planos $2x + 4y - z + 5 = 0$ y $x + y + 6z - 8 = 0$

- Prueba que son perpendiculares.
- Halla la ecuación de la recta intersección de los planos, y exprésala de dos formas distintas.
- Encuentra un punto que no pertenezca a la intersección de los planos y que esté a igual distancia de ambos.

EJERCICIO 29 : Septiembre 04-05. Obligatoria (1,5 ptos)

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,1,0)$ y es paralela al eje z (una ecuación: la que quieras). Haz un esquema dibujando los ejes, el punto y la recta.

EJERCICIO 30 : Junio 04-05. Optativa (3 ptos)

Sean r_1 y r_2 las rectas de ecuaciones:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -2y + 2z - a = 0 \end{cases}$$

Determina el valor de a para que r_1 y r_2 sean coplanarias.

EJERCICIO 31 : Septiembre 03-04. Optativa (4 ptos)

Dados los puntos $A = (1,2,0)$, $B = (-1,0,0)$, $C = (0,-2,0)$ y $D = (0,0,1)$, se pide:

- Ecuación de la recta que contiene a B y a C
- Área del triángulo ABC
- Volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .

EJERCICIO 32 : Junio 03-04. Optativa (3 puntos)

Dada la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y el plano $\Pi \equiv x + 3y - 3z = 3$, calcula:

- El plano que contiene a r y es perpendicular a Π .
- El volumen del tetraedro determinado por el plano Π y los planos coordenados.

EJERCICIO 33 : Junio 03-04. Obligatoria (1 pto)

Una recta pasa por el punto $(1,-1,0)$ y es paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 1$.
Halla sus ecuaciones.

EJERCICIO 34 : Septiembre 02-03. Optativa (3 ptos)

Discute, según los valores de a , la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan (no es necesario resolverlo)

$$\Pi_1 \equiv (a + 1)x + y + z = 3$$

$$\Pi_2 \equiv x + 2y + az = 4$$

$$\Pi_3 \equiv x + ay + 2z = 2a$$

EJERCICIO 35 : Septiembre 02-03. Optativa (2 ptos)

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A = (1,1,2) y es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 36 : Septiembre 02-03. Obligatoria (1 pto)

Determina m, si es posible, para que el plano de ecuación

$$2mx + 6(m - 1)y + (m + 3)z + 2m + 4 = 0$$

sea ortogonal a la recta que pasa por los puntos A = (2,0,-3) y B = (3,2,-2)

EJERCICIO 37 : Junio 02-03. Optativa (3 ptos)

Calcula el valor de a para que se corten en un punto las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 4x - y + z = -2 \\ 3x - y + az = -2 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 4y + 2z = -1 \\ 2x - ay + z = -1 \end{cases}$$

Halla para el valor de a obtenido el punto en el que se cortan.

EJERCICIO 38 : Junio 02-03. Obligatoria (1 pto)Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z + y = 1 \end{cases}$ y al punto (2,-1,2)**EJERCICIO 39** : Septiembre 01-02. Optativa (3 ptos)a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ que pasa por el punto (5,0,10)

b) Hallar la distancia de dicho plano al punto (2,1,0)

EJERCICIO 40 : Septiembre 01-02. Optativa (3 ptos)

Discute, según los valores de a, la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan:

$$\Pi_1 : 2x + 3y - 4z = 1$$

$$\Pi_2 : 4x + 6y - az = 2$$

$$\Pi_3 : x + y + az = 10$$

EJERCICIO 41 : Septiembre 01-02. Obligatoria (1 pto)Probar que las ecuaciones $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 5z - 9 = 0 \end{cases}$ y las $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ representan la misma recta.**EJERCICIO 42** : Junio 01-02. Optativa (3 Ptos)

Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A = (-1,1,0) y de B = (3,2,-4). Comprueba que obtienes un plano perpendicular al vector AB y que pasa por el punto medio del segmento AB

EJERCICIO 43 : Junio 01-02. Optativa (3 Ptos)

Estudia y resuelve, según los valores de λ , el sistema

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\2x - y &= \lambda \\y + 3z &= \lambda \\x - y + 2z &= 0\end{aligned}$$

Si las dos primeras ecuaciones representan una recta r y las dos últimas otra recta s , interpreta geoméricamente los resultados obtenidos.

EJERCICIO 44 : Junio 01-02. Obligatoria (1 pto)

Calcula el valor de a para que la recta $r \equiv \begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$ sea paralela al plano

$$\Pi: ax - 6y + 4z = 5$$

EJERCICIO 45 : Septiembre 00-01. Optativa (3 ptos)

Se considera el punto $P(1,1,0)$

a) Calcular el punto simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 0$

b) Calcular el punto simétrico de P respecto de la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

EJERCICIO 46 : Septiembre 00-01. Obligatoria (1 pto)

Los puntos $A = (3,0)$ y $B = (0,4)$ son puntos diametralmente opuestos de una circunferencia. Hallar la ecuación de ésta.

EJERCICIO 47 : Junio 00-01 Optativa (3 ptos)

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$$

EJERCICIO 48 : Septiembre 99-00 Optativa (3 ptos)

Estudia para que valores de λ y μ los planos:

$$\begin{aligned}2x - y + 3z &= 1 \\x + 2y - z &= \mu \\x + \lambda y - 6z &= -10\end{aligned}$$

a) Tienen un único punto común. b) Se cortan en una recta.

EJERCICIO 49 : Septiembre 99-00 Optativa (3 ptos)

Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1,0,1)$ y $B(1,2,3)$. Halla los puntos de dicha recta tales que su distancia al punto $C(2,-1,1)$ es de tres unidades.

EJERCICIO 50 : Septiembre 99-00 Obligatoria (1 pto)

Escribe la ecuación implícita del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4}; \quad x = y = z$$

EJERCICIO 51 : Junio 99-00 Optativa (3 pts)

Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A = (1,1,1)$ y $B = (0,2,0)$. El centro del paralelogramo es $O = (0,0,1)$. Se pide:

- Las coordenadas de los otros dos vértices.
- Ecuación del plano que contiene al paralelogramo.
- Área del paralelogramo.

EJERCICIO 52 : Junio 99-00 Obligatoria (1 pto)

La ecuación continua de una recta es $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+3$. Determina un vector director, las ecuaciones paramétricas de la recta y un punto de ella cuya primera coordenada sea 7.

EJERCICIO 53 : Septiembre 98-99 Optativa (4 pts)

Dados el plano $\pi \equiv x + y + az = b$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$, calcula a y b de modo que:

- r y π sean secantes. ¿ En qué punto se cortan?
- r y π sean paralelos
- r esté contenida en π

EJERCICIO 54 : Septiembre 98-99 Optativa (2 pts)

Sean los puntos $P(5,1,3)$ y $Q = (3,7,-1)$. Por el punto medio del segmento \overline{PQ} trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Se pide:

- Escribir la ecuación del plano π
- Calcular el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C. (O es el origen de \mathbb{R}^3)

EJERCICIO 55 : Septiembre 98-99 Obligatoria (1 pto)

Escribe la ecuación de la recta paralela al eje OY que pasa por el punto $(1,-2,3)$.

EJERCICIO 56 : Junio 98-99 Optativa (4 pts)

Discute y resuelve, según los valores de m, la posición relativa de los siguientes planos, indicando las figuras geométricas que determinan:

$$\pi_1 \equiv x - y = 1$$

$$\pi_2 \equiv 2x + 3y - 5z = -16$$

$$\pi_3 \equiv x + my - z = 0$$

EJERCICIO 57 : Junio 98-99 Optativa (3 pts)

Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C = (1,1,-1)$ y tiene uno de sus lados en la recta $r \equiv$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

- Calcula la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado
- Calcula la longitud del lado del cuadrado.

EJERCICIO 58 : Junio 98-99 Obligatoria (1 pto)

¿Son coplanarios los puntos $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (2,1,0)$ y $D = (-1,2,1)$?

EJERCICIO 59 : Septiembre 97-98 Optativa (4 ptos)

Estudia y resuelve, según los valores de a y de b, el sistema:

$$2x - y - 2z = b$$

$$x + y + z = 5$$

$$4x - 5y + az = -10$$

Teniendo en cuenta que cada ecuación representa un plano, interpreta geoméricamente los resultados obtenidos.

EJERCICIO 60 : Septiembre 97-98 Optativa (2 ptos)

Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv ax - 2y + z = 8$ y la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{3}$ según los valores del parámetro a.

En el caso en que la recta corte al plano en un punto, halla las coordenadas de dicho punto.

EJERCICIO 61 : Septiembre 97-98 Obligatoria (1 pto)

Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta $y = 3$ y del punto $F = (1,1)$. ¿Qué figura definen?

EJERCICIO 62 : Junio 97-98 Optativa (3 ptos)

Discute, según los valores de m, la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan (no es necesario resolverlo)

$$\pi_1 \equiv x - y - mz = 1$$

$$\pi_2 \equiv -3x + 2y + 4z = m$$

$$\pi_3 \equiv -x + my + z = 0$$

EJERCICIO 63 : Junio 97-98 Optativa (2 ptos)

Obtener en forma continua la recta proyección de la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$ sobre el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$.

EJERCICIO 64 : Junio 97-98 Obligatoria (1 pto)

Calcula la distancia del punto $P = (1,-1,3)$ a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$

EJERCICIO 65 : Septiembre 96-97 Optativa (3 ptos)

Halla la ecuación de la recta paralela a la recta r de ecuaciones: $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ y pasa por el punto $P(-1,2,0)$

EJERCICIO 66 : Junio 96-97 Optativa (3 ptos)

Dado el punto $P(-1,6,0)$ y las rectas $r = \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ y $s = \frac{x}{2} = \frac{y+3}{3} = -z$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s.

EJERCICIO 67 : Septiembre 95-96 Optativa (3 pts)

Dada la recta r de ecuaciones $r = \begin{cases} -x - y + z = 1 \\ 2x + z = -2 \end{cases}$ Hallar el valor de α para que el plano π de ecuación $\pi = -x + \alpha y + z = 4$ sea paralelo a la recta r .

EJERCICIO 68 : Junio 95-96 Optativa (4 pts)

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi = 2x + y + 3z = 6$, con los ejes coordenados. Deducir las ecuaciones de los tres lados.

EJERCICIO 69 : Septiembre 94-95 Optativa (3 pts)

Dada la recta r de ecuación $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ Hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto $P(0,2,2)$

EJERCICIO 70 : Septiembre 94-95 Optativa (3 pts)

Dados los planos π y σ de ecuaciones: $\pi = x + 2y - z - 2 = 0$ $\sigma = 2x + y + 2z - 1 = 0$. Se pide determinar la ecuación de la recta paralela a ambos planos y que pasa por el punto $P(0,1,-1)$

EJERCICIO 71 : Junio 94-95 Optativa (3 pts)

Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,0,0)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$

EJERCICIO 72 : Junio 94-95 Optativa (3 pts)

Dado el punto $P(1,2,-1)$ y la recta r de ecuaciones paramétricas $r = \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$, con

$\lambda \in \mathbb{R}$ (reales). Se pide determinar la ecuación del plano que contiene a ambos.