

TEMA 3 – DETERMINANTES

Cálculo de determinantes

EJERCICIO 1 : Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
 \text{e)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix} & & \\
 \text{g)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \text{h)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \text{i)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \text{j)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} \\
 \text{k)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} & \text{l)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix} & \text{m)} \begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \text{n)} \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 10a & 10b & 10c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{vmatrix} \\
 \text{ñ)} \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} & \text{o)} \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & -1 \\ x & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix} & \text{p)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} & \text{q)} \begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & b & a \end{vmatrix} \\
 \text{r)} \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} & & &
 \end{array}$$

EJERCICIO 2 : Resuelve, enunciando las propiedades que utilices:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 & \text{b)} \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 & \text{c)} \begin{vmatrix} x & x & x & 5 \\ x & x & 5 & x \\ x & 5 & x & x \\ 5 & x & x & x \end{vmatrix} = 0 \\
 \text{d)} \begin{vmatrix} x+2 & 3 & 4 \\ 4 & x+2 & 3 \\ 4 & 3 & x+2 \end{vmatrix} = 0 & \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ x & 1 & 3 & 4 \\ x & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 0 &
 \end{array}$$

Propiedades de los determinantes

EJERCICIO 3 : Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$. Halla el valor del determinante $\begin{vmatrix} 5a+b & 3a+4b \\ 5c+d & 3c+4d \end{vmatrix}$.

EJERCICIO 4 : Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3$ Calcular $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+1 & 1+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix}$

Enuncia, correctamente las propiedades de los determinantes que utilices.

EJERCICIO 5 : Aplicad las propiedades de los determinantes (o sea, no desarrolléis el determinante)

para calcular una solución de la siguiente ecuación de tercer grado en x : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & 8 \\ 1 & 8 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

EJERCICIO 6 : Probar que, cualquiera que sean los valores a, b, c, d, los siguientes determinantes son

nulos: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ b & c & d \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

EJERCICIO 7 : Determinar, justificando la respuesta cuáles de los siguientes determinantes son nulos y cuáles no:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 8 : Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 9 : Demuestra, sin desarrollarlos, que los siguientes determinantes son múltiplos de 6.

a) $\begin{vmatrix} 9 & 1 & -7 \\ 3 & 5 & 2 \\ -6 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 10 : Probar sin desarrollarlo que

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

EJERCICIO 11 : El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba que es así sin desarrollarlo.

EJERCICIO 12 : Demuestra sin desarrollarlo que el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 13.

EJERCICIO 13 : Conociendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, calcular, enunciando las propiedades que utilices:

a) $\begin{vmatrix} g+a & h+b & i+c \\ 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} i & h & g \\ 3f & 3e & 3d \\ c & b & a \end{vmatrix}$

EJERCICIO 14 : Conocido $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & a & -c \\ -1 & 4 & b \end{vmatrix} = 10$ Calcular: $\begin{vmatrix} 2b & -4 & 1 \\ 4c & 2a & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 15 : Sabiendo que $|A| = -2$ y $|B| = 3$ y que A y B son matrices de orden 3, calcular:

a) $|2A|$ b) $|AB|$ c) $|B^{-1}|$ d) $|A^t|$ e) $|B^2|$ f) $|-A|$

EJERCICIO 16 : Resolver la ecuación $\det(A - xI) = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, I la matriz identidad de orden 3 y $x \in \mathbb{R}$ la incógnita.

EJERCICIO 17 : Desarrolla dando el resultado en forma de producto de factores: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 18 : Prueba que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$ b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Rango de una matriz**EJERCICIO 19** : Calcular el rango de las siguientes matrices:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 20 : Determina, según los valores de los parámetros, el rango de las siguientes matrices

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2x \\ x & 1 & 3 \\ 1 & 7 & x \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & -m & -5 & 2 \\ 0 & 1 & m-2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x \end{pmatrix}$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} -m & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

e)
$$\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$