(10) $\begin{cases} 2X+Y=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}=A \\ X-Y=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=B \end{cases}$

$$\begin{cases} 2X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases}$$

$$3X=A+B$$

$$X=\frac{1}{3}(A+B)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&3\\3&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2/3&1\\1&0\end{pmatrix}=X}$$

$$Y=X-B=\begin{pmatrix}2/3&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1/3&2\\0&0\end{pmatrix}=Y}$$

oct 29-12:17

(33) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$AX=XA$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x+z&y+t\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&x+y\\z&z+t\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{x}+z=\cancel{x} \longrightarrow z=0 \\ \cancel{y}+t=x+\cancel{y} \longrightarrow t=x \\ \cancel{z=z} \\ \cancel{t}=z+\cancel{t} \to z=0 \end{cases}$$

$x=t=\alpha$, $z=0$, $y=\beta$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$$

$$A^2+2A^{-1}X$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}:\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\alpha&\beta-\alpha\\0&\alpha\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1+2\alpha&2+2\beta-2\alpha\\0&1+2\alpha\end{pmatrix}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$$

oct 29-14:18

Dos ecuaciones con cuatro incógnitas (2 g.l.) $\Rightarrow z=0, x=\alpha, t=\alpha, y=\beta$

$X=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}$ $\forall\ \alpha,\beta\in R$

2.6 – DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

2.6.1 – COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ vectores y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ números, al vector formado del siguiente modo: $a_1.\vec{v}_1 + a_2.\vec{v}_2 + a_3.\vec{v}_3 + \ldots + a_n\vec{v}_n$

Se le llama **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$

Ejemplo: Escribir el vectores (0,3,-3) como combinación lineal de los vectores:
$\vec{v}_1=(1,1,0)$, $\vec{v}_2=(2,-1,3)$

$\bar{v}_1=(1,2,3)$ $\bar{v}_2=(1,0,2)$

$2\bar{v}_1+3\bar{v}_2=(2,4,6)+(3,0,6)=(5,4,12)$

$(0,3,-3)=\alpha(1,1,0)+\beta(2,-1,3)$

$(0,3,-3)=(\alpha+2\beta,\alpha-\beta,3\beta)$

$$\begin{cases} 0=\alpha+2\beta & 2-2=0 \text{ SI} \\ 3=\alpha-\beta \to \alpha=2 \\ -3=3\beta \to \beta=-1 \end{cases}$$

$$\boxed{(0,3,-3)=2(1,1,0)-(2,-1,3)}$$

oct 29-14:25

tendría solución)

2.6.2 – DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

Un conjunto de vectores: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ se dice que son **linealmente dependientes** (L.D.) si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

Un conjunto de vectores: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ se dice que son **linealmente independientes** (L.I) si ninguno de alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

En la práctica: Para saber si un conjunto de vectores son linealmente dependientes o independientes lo que se hace es una combinación de ellos igualada al vector cero

$$a_1.\vec{v}_1 + a_2.\vec{v}_2 + a_3.\vec{v}_3 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

- Si todos los a_i son cero $\Rightarrow$ Los vectores son linealmente independientes
- Si algún a_i es no nulo $\Rightarrow$ Los vectores son linealmente dependientes

2.7 – RANGO DE UNA MATRIZ

2.7.1 – DEFINICIÓN

Llamamos **rango de una matriz** al número de filas o columnas linealmente independientes.

2.7.2 – CÁLCULO

$\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3$ l. dep $\bar{v}_3=\alpha\bar{v}_1+\beta\bar{v}_2$

L.Dep.

$a_1\bar{v}_1+a_2\bar{v}_2+a_3\bar{v}_3=\bar{0} \to$ Algún $a_i\neq 0$

$\to$ Todos $a_i=0$ $\to$ L.Indep

$$\left.\begin{array}{l} 2\bar{v}_1+3\bar{v}_2+8\bar{v}_3=\bar{0} \\ \bar{v}_1=-\frac{3}{2}\bar{v}_2-\frac{8}{2}\bar{v}_3 \end{array}\right\} \text{L.D}$$

$0\bar{v}_1+0\bar{v}_2+0\bar{v}_3=\bar{0}$

oct 29-14:28

En la práctica: Para saber si un conjunto de vectores son linealmente dependientes o independientes lo que se hace es una combinación de ellos igualada al vector cero

$$a_1 . \vec{v}_1 + a_2 . \vec{v}_2 + a_3 . \vec{v}_3 + \ldots + a_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

- Si todos los a_i son cero ⇒ Los vectores son linealmente independientes
- Si algún a_i es no nulo ⇒ Los vectores son linealmente dependientes

2.7 – RANGO DE UNA MATRIZ

2.7.1 – DEFINICIÓN

Llamamos **rango de una matriz** al número de filas o columnas linealmente independientes.

2.7.2 – CÁLCULO

Para estudiar el rango de una matriz:
1 – Hacemos ceros debajo de la diagonal principal.
2 – El número de filas no nulas es el rango

oct 29-14:31

Rango A = Rango A^t
Rango = min(Nº F, Nº C)

TEMA 2 – ÁLGEBRA DE MATRICES – Matemáticas II – 2º Bachillerato 13

$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & - & - \\ & & - \end{pmatrix}$

Ejemplo: Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$

$A_{3x2} = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \\ & - \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 = 3F_3 - 5F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 19 & -26 & 53 \\ 0 & -38 & 52 & -106 \end{pmatrix} F_3 = F_3 + 2F_2 \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 19 & -26 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango A = 2

Para estudiar el rango de una matriz con parámetros
- Se lleva el parámetro lo más abajo y a la derecha posible.
- Se hacen ceros debajo de la diagonal principal (la fila que cambiamos no se puede multiplicar por el parámetro.
- Se igualan, por separado, los elementos de la diagonal principal a cero
- Un caso más que el números de parámetros (se estudia cada caso)

Ejemplo: Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} F_2 = -2F_2 + F_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \end{pmatrix} F_3 = F_3 + aF_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$F_2 = -2F_2 + F_1$

$F_3 = F_3 + aF_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} \quad 1 - a^2 = 0 \quad a = \pm 1$$

CASO I $a = 1$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rango A = 2

CASO II $a = -1$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ''

CASO III $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \square \\ 0 & -1 & \square \\ 0 & 0 & \ast \end{pmatrix}$ Rango A = 3

$\ast \neq 0$

oct 29-14:32

Dep o indep vectores

$\begin{pmatrix} v_1 \text{———} \\ v_2 \text{———} \\ v_3 \text{———} \end{pmatrix}$ ⇒ Rango A es max nº l. indep

⇒ Se va alguna fila ⇒ l. dep

Estudiar si $\vec{v}_1 = (1,1,2)$ $\vec{v}_2 = (2,-1,0)$ $\vec{v}_3 = (3,0,2)$

son lineal dep o indep

MODO 1 $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0}$

$\alpha = \beta = \gamma = 0 \rightarrow$ l. indep

Alguno $\neq 0 \rightarrow$ l. dep

MODO 2 $\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2 + \beta \vec{v}_3$?

$$\boxed{\text{MODO 3} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Son l. dep $\vec{v}_3$ dep $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

$\vec{v}_3 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$

oct 29-14:38

Deberes Pag 73

20) A, B

27

28

29) M y N

oct 29-14:44

$$\begin{array}{c} \\ \\ -a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\cancel{F_3 = -aF_3 + F_2}$$

$a=0$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $RA=2$

$a=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $RA=2$

$a \neq 0,1$ $RA=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{a} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ -a \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

$a=4$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $RA=2$

$a \neq 1$ $RA=3$

$$\boxed{F_3 = F_3 - aF_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad RA=3$$

oct 29-14:47