CORREGIR DEBERES

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) A + B = A_{2x3} + B_{2x2} No se puede hacer porque no tienen la misma dimensión

b) A + C^t = A_{2x3} + $C^t{}_{2x3}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

c) 2B = $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

d) 2A – 3C^t = $2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & -6 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 \\ -11 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

e) AB = A_{2x3} .B_{2x2} No se puede hacer

f) BA = B_{2x2} . A_{2x3} = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} 1.1+2.(-1) & 1.2+2.3 & 1.0+2.1 \\ 3.1+(-1).(-1) & 3.2+(-1).3 & 3.0+(-1).1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

TEORÍA

2.3 – PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON MATRICES

2.3.1 – PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

Las matrices de dimensión m x n pueden sumarse, y el resultado es otra matriz m x n. Además, la suma cumple las siguientes propiedades:

1. **Asociativa**: (A + B) + C = A + (B + C)

2. **Conmutativa:** A + B = B + A

3. **Elemento neutro:** La matriz $\mathbf{O}_{m,\,n}$, cuyos elementos son todos 0 (**matriz nula**), sumada con cualquier otra matriz de dimensión m x n, la deja igual, es decir, A + **O** = **O** + A = A

   Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. **Elemento opuesto**: Toda matriz A, tiene su opuesta –A. La opuesta de A = (a_{ij}) es –A = (-a_{ij}), pues (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} – a_{ij}) = (0) = **O**

   Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.2 – PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE NÚMEROS POR MATRICES

Si a, b $\in$ R, y A, B $\in$ $M_{m,\,n}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. a.(b.A) = (a.b).A

2. (a + b).A = a.A + b.A

3. a.(A + B) = a.A + a.B

4. 1.A = A

Ejemplo: $1.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2.3.3 – PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

1. Asociativa: $(A_{mxn} \,.\, B_{nxp}).\, C_{pxq} = A_{mxn} \,.(B_{nxp}.C_{pxq})$

2. El producto de matrices **no es conmutativo:** $A.B \neq B.A$

Ejemplo 1: $A_{2x2}.B_{3x2}$ No existe
$B_{3x2}.A_{2x2}$ Si existe

Ejemplo 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$ No coinciden

Como consecuencia, hemos de mantener el orden en que aparezcan las matrices que han de multiplicarse. Por tanto, utilizaremos expresiones del siguiente tipo: "La matriz A está multiplicada *por la izquierda (o por la derecha)* por la matriz B.

3. Elemento neutro: A.I = I.A = A siendo I **la matriz identidad o unidad.**

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. No siempre existe el elemento inverso: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$, siendo A^{-1} **la matriz inversa de A**

No todas las matrices tienen inversa:

- Si una matriz tiene inversa se la llama **inversible o regular.**
- Si una matriz no tiene inversa se le llama **singular.**

2.3.4 – PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS

1. **Distributiva a izquierda:** $A.(B + C) = A.B + A.C$

2. **Distributiva a derecha:** $(A + B).C = A.C + B.C$

2.3.5 – PRODUCTOS NOTABLES

1. $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, excepto si A y B son conmutativas

   Demostración: $(A + B)^2 = (A + B).(A + B) = A.A + A.B + B.A + B.B = A^2 + A.B + B.A + B^2$
   Pero $AB + BA \neq 2AB$ porque el producto de matrices no es conmutativo

2. $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$, excepto si A y B son conmutativas

3. $(A + B).(A – B) \neq A^2 - B^2$, excepto si A y B son conmutativas

2.3.6 – PROPIEDADES DE LA TRASPOSICIÓN DE MATRICES

1. $(A^t)^t = A$

2. $(A + B)^t = A^t + B^t$

3. $(k.A)^t = k.A^t$

   Demostración: $(k.A)^t = k^t.A^t = k.A^t$
   (k es un número (k) una matriz de una fila y una columna, por tanto $k^t = k$)

4. $(A.B)^t = B^t.A^t$

   Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow (A.B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

   $A^t.B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

   $B^t.A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

5. Si I es la matriz identidad o unidad: $I^t = I$

6. Si A es una matriz simétrica: $A^t = A$

2.3.7 – PROPIEDADES DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

3. $(k.A)^{-1} = \frac{1}{K}.A^{-1}$

Ejemplo: $(k.A)^{-1} = k^{-1}.A^{-1} = \frac{1}{k} . A^{-1}$

4. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

5. Si I es la matriz identidad o unidad: $I^{-1} = I$

6. $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

RESUMEN DE TEORÍA: Cuidado con…

1 – El producto de matrices no es conmutativo $AB \neq BA$ (No se puede cambiar el orden)
2 – No se cumplen los productos notables (Porque el producto de matrices no es conmutativo

3 – Propiedades de la traspuesta y la inversa

TRASPUESTA	INVERSA
$(A + B)^{t} = A^{t} + B^{t}$	$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
$(k.A)^{t} = k.A^{t}$	$(k.A)^{-1} = \frac{1}{k}.A^{-1}$
$(A.B)^{t} = B^{t}.A^{t}$	$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

4. $A.I = I.A = A$
5. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

No toda matriz tiene inversa:

- Si tiene inversa, se llama inversible o regular
- Si no tiene inversa, se llama singular.

DEBERES

De las páginas del final del tema, creo que es la 72: Ejercicios 1, 2 y 9