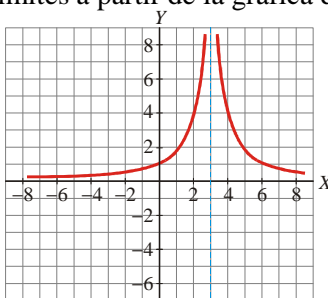


TEMA 11 – LÍMITES, CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

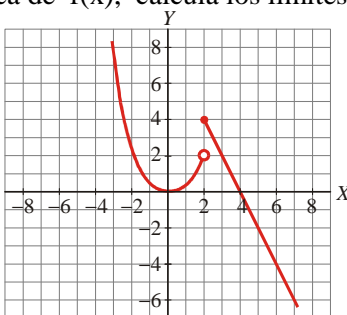
Cálculo de límites sobre la gráfica

EJERCICIO 1 : Calcula los siguientes límites a partir de la gráfica de $f(x)$:



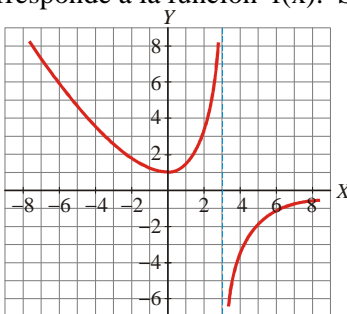
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

EJERCICIO 2 : Dada la siguiente gráfica de $f(x)$, calcula los límites que se indican:



- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

EJERCICIO 3 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$. Sobre ella, calcula los límites:



- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Cálculo de límites inmediatos

EJERCICIO 4 : Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x^2 + 2x + 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 9}$ c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6-3x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \log x$ g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} \right)$ h) $\lim_{x \rightarrow -2} 3^{x+1}$
 i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$ j) $\lim_{x \rightarrow -2} (3-x)^2$ k) $\lim_{x \rightarrow -8} (1 + \sqrt{-2x})$ l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

Cálculo de límites e interpretación geométrica**EJERCICIO 5** : Calcula los siguientes límites e interpreta geoméricamente el resultado.

$$\begin{array}{llll}
 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{(2-x)^3} & 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x^3}{x^2-1} & 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5+3x} & 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{5+3x} \\
 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)^3} & 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^3}{x^2} & 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2-x} & 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1} \\
 9) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4-x^2} & 10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2x-6} & 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+1} & 12) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+5}{x+3} \\
 13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} & 14) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x+3x^3) & 15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+3x}{x^2-1} & 16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - x^2 \right) \\
 17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1+x^2} & 18) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} & 19) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-4} & 20) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4-3x}{x^4+1}
 \end{array}$$

EJERCICIO 6 : Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} & b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3x}-x) & c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{2x+7} & d) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{x-4} \\
 e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1} & f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+1} & g) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}} & h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+x^2-4x-4} \\
 i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1} & j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} & k) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{(x+1)^2} & l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-3x+7}-2x
 \end{array}$$

EJERCICIO 7 : Calcular los siguientes límites:

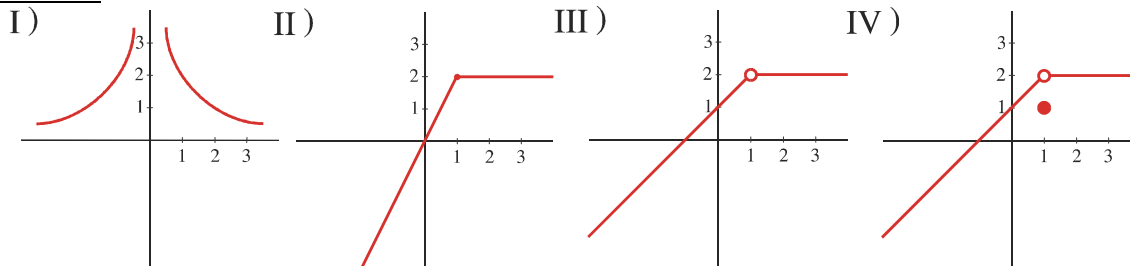
$$\begin{array}{llll}
 a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-24x+48}{x-4} & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18} & c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c} & d) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} \\
 e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} & f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2} & g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x} & h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x+3} \\
 i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x^3-1} & j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+3} \right)^{2x} & l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{\frac{x}{2}} \\
 m) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+x-x} & n) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9} & &
 \end{array}$$

EJERCICIO 8 : Calcula el límite cuando $x \rightarrow 3$ de cada una de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos en cada caso:

$$\begin{array}{lll}
 a) f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x & b) f(x) = \frac{x^2}{x-3} & c) f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}
 \end{array}$$

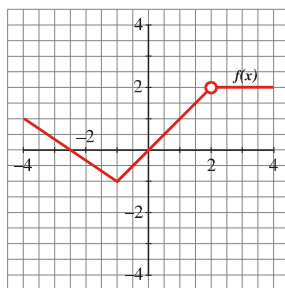
Estudio de la continuidad a partir de una gráfica

EJERCICIO 9 : Dadas las funciones:



- a) Di si son continuas o no. b) Halla la imagen de $x = 1$ para cada una de las cuatro funciones.

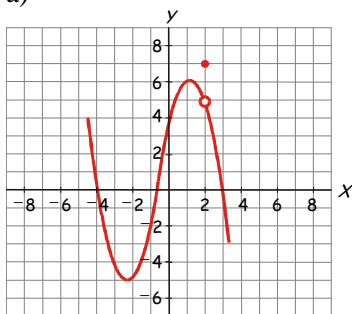
EJERCICIO 10 : Dada la gráfica:



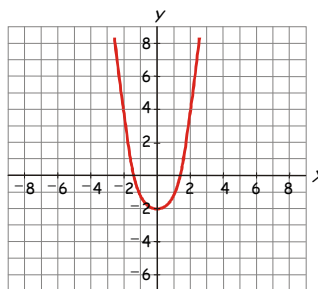
- a) Di si $f(x)$ es continua o no. Razona tu respuesta. b) Halla $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ y $f(3)$.

EJERCICIO 11 : ¿Son continuas las siguientes funciones en $x = 2$?

a)

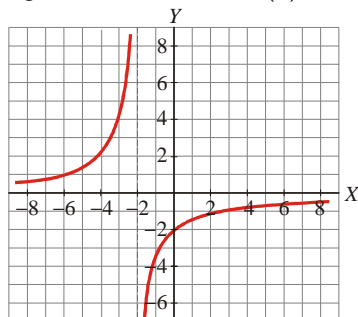


b)



Si alguna de ellas no lo es, indica la razón de la discontinuidad.

EJERCICIO 12 : Esta es la gráfica de la función $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = -2$?

b) ¿Y en $x = 0$?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica la causa de la discontinuidad.

Estudio de la continuidad a partir de su expresión analítica**EJERCICIO 13** : Averiguar los puntos e intervalos de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$a) y = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-5x+6}} \quad b) y = \frac{x+5}{x^2-5x+6} \quad c) y = \sqrt{x^2-5x+6}$$

EJERCICIO 14 : Estudia la continuidad de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 15 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad e) f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad f) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 15 : Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -6 \leq x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -2x+13 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 3 & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 16 : Hallar $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) ¿ Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?b) Estudia su continuidad en el punto $x = 2$ **EJERCICIO 17** : Halla el valor de k para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 18 : Halla el valor de m para que $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + mx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en todo \mathbb{R} .**Asíntotas y ramas infinitas****EJERCICIO 19** : Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

$$a) f(x) = \frac{1}{4-x^2} \quad b) f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2} \quad c) f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)^2} \quad d) f(x) = \frac{-x^3+x}{2}$$

$$e) f(x) = \frac{x^3-1}{x+3} \quad f) f(x) = \frac{x}{x^2-9} \quad g) f(x) = \frac{x^3-2x^2}{2x+1} \quad h) f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$$

$$i) f(x) = \frac{x^4+2x}{x^2+1} \quad j) f(x) = \frac{1-3x}{2-x} \quad k) f(x) = \frac{1+x^2}{x^3} \quad l) f(x) = \frac{x}{x+2}$$

$$m) f(x) = \frac{4x^2-3}{x} \quad n) f(x) = x^2-x$$