

TEMAS 4 Y 5 – TRIGONOMETRÍA

UNIDADES DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

EJERCICIO 1

a) Pasa a radianes los siguientes ángulos: 210° y 70° b) Pasa a grados los ángulos: $\frac{7\pi}{6}$ rad y $3,5$ rad

Solución:

$$a) 210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{7\pi}{18} \text{ rad}$$

$$b) \frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$$

$$3,5 \text{ rad} = 3,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 200^\circ 32' 7''$$

EJERCICIO 2 : Completa la tabla:

GRADOS	130°		330°	
RADIANES		$4\pi/3$		$1,5$

Solución:

$$130^\circ = 130 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{13\pi}{18} \text{ rad}$$

$$\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$$

$$330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

$$1,5 \text{ rad} = 1,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 85^\circ 56' 37''$$

Por tanto:

GRADOS	130°	240°	330°	$85^\circ 56' 37''$
RADIANES	$13\pi/18$	$4\pi/3$	$11\pi/6$	$1,5$

ÁNGULOS DE MEDIDAS CUALESQUIERA

EJERCICIO 3 : Si $\text{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ y α es un ángulo que está en el primer cuadrante, calcula (sin hallar α):

a) $\text{tg}(180^\circ - \alpha)$ b) $\text{tg}(180^\circ + \alpha)$ c) $\text{tg}(360^\circ - \alpha)$ d) $\text{tg}(360^\circ + \alpha)$

Solución:

$$a) \text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$b) \text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

$$c) \text{tg}(360^\circ - \alpha) = -\text{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$d) \text{tg}(360^\circ + \alpha) = \text{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 4 : Si $\text{sen} \alpha = 0,35$ y $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ halla (sin calcular α):

a) $\text{sen}(180^\circ - \alpha)$ b) $\text{cos}(180^\circ + \alpha)$

Solución:

$$a) \text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen} \alpha = 0,35$$

$$b) \text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos} \alpha$$

$$\text{Necesitamos saber cuánto vale } \text{cos} \alpha: \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,35^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$0,1225 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 0,8775 \Rightarrow \text{cos} \alpha = 0,94 \text{ (es positivo, pues } 0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

$$\text{Por tanto: } \text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos} \alpha = -0,94$$

EJERCICIO 5 : Sabiendo que $\text{sen } 50^\circ = 0,77$, $\text{cos } 50^\circ = 0,64$ y $\text{tg } 50^\circ = 1,19$, calcula (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora):

- a) $\text{cos } 130^\circ$ b) $\text{tg } 310^\circ$ c) $\text{cos } 230^\circ$ d) $\text{sen } 310^\circ$

Solución:

$$\text{a) } \text{cos } 130^\circ = \text{cos}(180^\circ - 50^\circ) = -\text{cos } 50^\circ = -0,64$$

$$\text{b) } \text{tg } 310^\circ = \text{tg}(360^\circ - 50^\circ) = -\text{tg } 50^\circ = -1,19$$

$$\text{c) } \text{cos } 230^\circ = \text{cos}(180^\circ + 50^\circ) = -\text{cos } 50^\circ = -0,64$$

$$\text{d) } \text{sen } 310^\circ = \text{sen}(360^\circ - 50^\circ) = -\text{sen } 50^\circ = -0,77$$

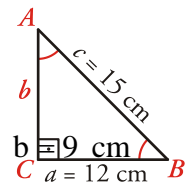
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

EJERCICIO 6 : En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

Solución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 12^2 + b^2 = 15^2 \rightarrow 144 + b^2 = 225 \Rightarrow b^2 = 225 - 144 = 81 \rightarrow b = 9 \text{ cm}$$

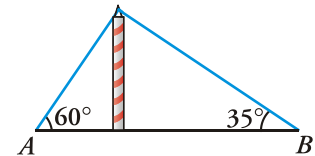


$$\text{Hallamos los ángulos: } \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{9}{15} = 0,6 \rightarrow \hat{B} = 36^\circ 52' 12'' \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 53^\circ 7' 48''$$

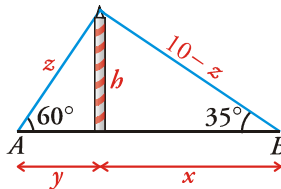
$$\text{Por tanto: } a = 12 \text{ cm; } \hat{A} = 53^\circ 7' 48''; b = 9 \text{ cm; } \hat{B} = 36^\circ 52' 12''; c = 15 \text{ cm; } \hat{C} = 90^\circ$$

EJERCICIO 7 : Para sujetar un mástil al suelo como indica la figura hemos necesitado 10 metros de cable.

Halla la altura del mástil y la distancia entre los puntos A y B.



Solución:



$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } 60^\circ = \frac{h}{z} \\ \text{sen } 35^\circ = \frac{h}{10-z} \end{array} \right\} \begin{array}{l} z \text{sen } 60^\circ = h \\ (10-z) \text{sen } 35^\circ = h \end{array} \Rightarrow$$

$$z \text{sen } 60^\circ = (10-z) \text{sen } 35^\circ \rightarrow z \text{sen } 60^\circ = 10 \text{sen } 35^\circ - z \text{sen } 35^\circ$$

$$z \text{sen } 60^\circ + z \text{sen } 35^\circ = 10 \text{sen } 35^\circ \rightarrow z(\text{sen } 60^\circ + \text{sen } 35^\circ) = 10 \text{sen } 35^\circ \Rightarrow z = \frac{10 \text{sen } 35^\circ}{\text{sen } 60^\circ + \text{sen } 35^\circ} = 3,98 \text{ m}$$

$$h = z \text{sen } 60^\circ = \frac{10 \text{sen } 35^\circ \text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 60^\circ + \text{sen } 35^\circ} = 3,45 \text{ m} \Rightarrow \text{La altura del mástil es de } 3,45 \text{ m}$$

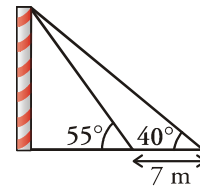
Para hallar la distancia entre A y B, tenemos que hallar x e y:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{y} \rightarrow y = \frac{h}{\text{tg } 60^\circ} = \frac{3,45}{\text{tg } 60^\circ} = 1,99 \text{ m}$$

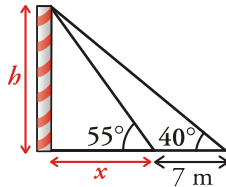
$$\text{tg } 35^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{3,45}{\text{tg } 35^\circ} = 4,93 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre A y B es de $x + y = 4,93 + 1,99 = 6,92 \text{ m}$.

EJERCICIO 8 : Raquel ve el punto más alto de una antena bajo un ángulo de 55° . Alejándose 7 metros en línea recta, el ángulo es de 40° . ¿Cuál es la altura de la antena?



Solución:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 55^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 40^\circ &= \frac{h}{x+7} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x \operatorname{tg} 55^\circ &= h \\ (x+7) \operatorname{tg} 40^\circ &= h \end{aligned} \Rightarrow x \operatorname{tg} 55^\circ = (x+7) \operatorname{tg} 40^\circ \rightarrow x \operatorname{tg} 55^\circ = x \operatorname{tg} 40^\circ + 7 \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$x \operatorname{tg} 55^\circ - x \operatorname{tg} 40^\circ = 7 \operatorname{tg} 40^\circ \rightarrow x(\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ) = 7 \operatorname{tg} 40^\circ \Rightarrow x = \frac{7 \operatorname{tg} 40^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ} = 9,97 \text{ m}$$

$$h = x \operatorname{tg} 55^\circ = \frac{7 \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 55^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ} = 14,24 \text{ m} \Rightarrow \text{La altura de la antena es de } 14,24 \text{ metros.}$$

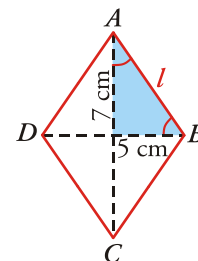
EJERCICIO 9 : Las diagonales de un rombo miden 10 y 14 cm, respectivamente. Calcula el lado del rombo y sus ángulos.

Solución:

Hallamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras: $7^2 + 5^2 = l^2 \rightarrow l^2 = 74 \rightarrow l = 8,6 \text{ cm}$

Hallamos los ángulos: $\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{5}{7} \rightarrow \hat{A} = 35^\circ 32' 16'' \rightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 54^\circ 27' 44''$

Los ángulos del rombo miden: $2\hat{A} = 71^\circ 4' 31''$
 $2\hat{B} = 108^\circ 55' 29''$



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

EJERCICIO 10 : En dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, B. Si consideramos el triángulo de vértices A, B y C, el ángulo en A es de 65° y el ángulo en C es de 80° . ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

Solución

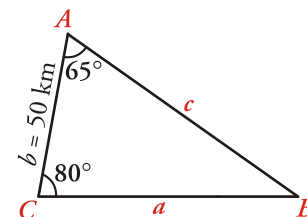
Hallamos el ángulo \hat{B} : $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 35^\circ$

Hallamos los valores de a y c aplicando el teorema de los senos:

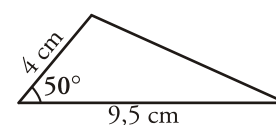
$$\frac{a}{\operatorname{sen} 65^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} 35^\circ} \rightarrow a = \frac{50 \operatorname{sen} 65^\circ}{\operatorname{sen} 35^\circ} = 79 \text{ km}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 80^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} 35^\circ} \rightarrow c = \frac{50 \operatorname{sen} 80^\circ}{\operatorname{sen} 35^\circ} = 85,85 \text{ km}$$

Por tanto, el barco está a 79 km de la estación C y a 85,85 km de la estación A.



Los metros de valla necesarios serían: $a + b + c = 20 + 15 + 20,49 = 55,49 \text{ m}$



EJERCICIO 11 : Resuelve este triángulo, es decir, halla sus lados y sus ángulos:*Solución:*Hallamos el lado c con el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$c^2 = 9,5^2 + 4^2 - 2 \cdot 9,5 \cdot 4 \cdot \cos 50^\circ \Rightarrow c^2 = 57,4 \rightarrow c = 7,58 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$c^2 = 90,25 + 16 - 48,85$$

Como conocemos los tres lados, la solución es única.

Hallamos el ángulo \hat{A} :

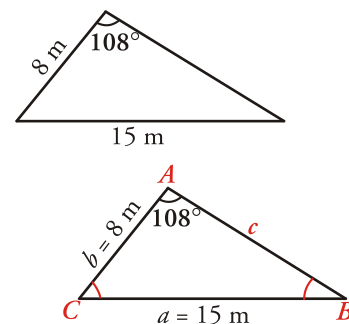
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{9,5}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{7,58}{\operatorname{sen} 50^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{9,5 \operatorname{sen} 50^\circ}{7,58} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = 0,96 \rightarrow \hat{A} = 73^\circ 45' 24''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 56^\circ 14' 36''$$

Por tanto: $a = 9,5$ cm; $\hat{A} = 73^\circ 45' 24''$; $b = 4$ cm; $\hat{B} = 56^\circ 14' 36''$; $c = 7,58$ cm; $\hat{C} = 50^\circ$ **EJERCICIO 12 : Halla los lados y los ángulos de este triángulo:***Solución:*Hallamos el ángulo \hat{B} con el teorema de los senos :

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \frac{15}{\operatorname{sen} 108^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{8 \operatorname{sen} 108^\circ}{15} = 0,507 \rightarrow \hat{B} = 30^\circ 28' 46''$$

(Como \hat{A} es obtuso, \hat{B} y \hat{C} han de ser agudos, solo hay una relación).Hallamos el ángulo \hat{C} : $\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 41^\circ 31' 14''$ Calculamos el lado c : $\frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen}(41^\circ 31' 14'')} = \frac{15}{\operatorname{sen} 108^\circ} \rightarrow c = 10,46$ mPor tanto: $a = 15$ m; $\hat{A} = 108^\circ$; $b = 8$ m; $\hat{B} = 30^\circ 28' 46''$; $c = 10,46$ m; $\hat{C} = 41^\circ 31' 14''$ **EJERCICIO 13 : Calcula los lados y los ángulos del siguiente triángulo:***Solución:*

Como conocemos los tres lados (y cada lado es menor que la suma de los otros dos), existe solución única. Hallamos los ángulos A y B con el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow 51,84 = 12,25 + 36 - 42 \cos \hat{A} \Rightarrow$$

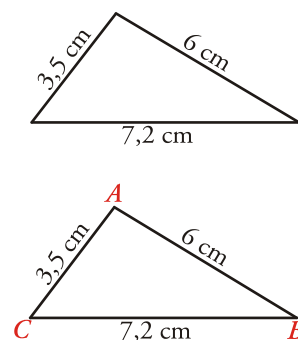
$$42 \cos \hat{A} = 12,25 + 36 - 51,84 \Rightarrow 42 \cos \hat{A} = -3,59$$

$$\cos \hat{A} = -0,085 \rightarrow \hat{A} = 94^\circ 54' 12''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac \cos \hat{B} \rightarrow 12,25 = 51,84 + 36 - 86,4 \cos \hat{B} \Rightarrow$$

$$86,4 \cos \hat{B} = 51,84 + 36 - 12,25 \rightarrow \cos \hat{B} = 0,875 \Rightarrow \hat{B} = 28^\circ 58' 7''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 56^\circ 7' 41''$$

Por tanto: $a = 7,2$ cm; $\hat{A} = 94^\circ 54' 12''$; $b = 3,5$ cm; $\hat{B} = 28^\circ 58' 7''$; $c = 6$ cm; $\hat{C} = 56^\circ 7' 41''$ **EJERCICIO 14 : Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110° . Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?**

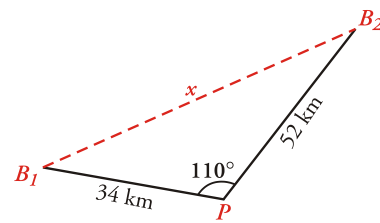
Solución:

Hallamos la distancia, x , aplicando el teorema del coseno:

$$x^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot \cos 110^\circ \Rightarrow x^2 = 5069,38$$

$$x^2 = 1156 + 2704 + 1209,38 \quad x = 71,20 \text{ km}$$

Por tanto, la distancia entre los dos barcos es de 71,20 km.



EJERCICIO 15 : Se desea unir tres puntos, A , B y C , mediante caminos rectos que unan A con B , B con C y C con A . La distancia de A a B es de 100 metros, el ángulo correspondiente a B es de 50° , y el ángulo en A es de 75° . ¿Cuál es la distancia entre B y C ? ¿Y entre A y C ?

Solución:

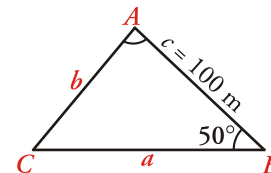
Hallamos el ángulo \hat{C} : $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 55^\circ$

Calculamos a y b aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\sen 75^\circ} = \frac{100}{\sen 55^\circ} \rightarrow a = \frac{100 \cdot \sen 75^\circ}{\sen 55^\circ} = 117,92 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\sen 50^\circ} = \frac{100}{\sen 55^\circ} \rightarrow b = \frac{100 \cdot \sen 50^\circ}{\sen 55^\circ} = 93,52 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre B y C es de 117,92 m y la distancia entre A y C es de 93,52 m.



EJERCICIO 16 : Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:

Solución:

Hallamos el ángulo \hat{B} con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\sen \hat{A}} = \frac{b}{\sen \hat{B}} \rightarrow \frac{10}{\sen 105^\circ} = \frac{6}{\sen \hat{B}} \Rightarrow$$

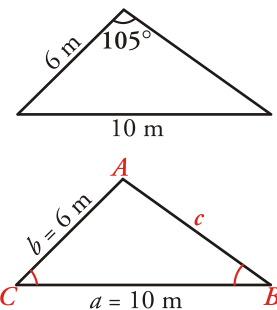
$$\sen \hat{B} = \frac{6 \sen 105^\circ}{10} = 0,58 \rightarrow \hat{B} = 35^\circ 25' 9''$$

(Como \hat{A} es obtuso, \hat{B} y \hat{C} han de ser agudos; solo hay una solución).

Hallamos el ángulo de \hat{C} : $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 39^\circ 34' 51''$

Calculamos el lado c : $\frac{c}{\sen \hat{C}} = \frac{a}{\sen \hat{A}} \rightarrow \frac{c}{\sen(39^\circ 34' 51'')} = \frac{10}{\sen 105^\circ} \rightarrow c = 6,6 \text{ m}$

Por tanto: $a = 10 \text{ m}$; $\hat{A} = 105^\circ$; $b = 6 \text{ m}$; $\hat{B} = 35^\circ 25' 9''$; $c = 6,6 \text{ m}$; $\hat{C} = 39^\circ 34' 51''$



EJERCICIO 17 : Sara y Manolo quieren saber a qué distancia se encuentra un castillo que está en la orilla opuesta de un río. Se colocan a 100 metros de distancia el uno del otro y consideran el triángulo en cuyos vértices están cada uno de los dos, y el castillo. El ángulo correspondiente al vértice en el que está Sara es de 25° y el ángulo del vértice en el que está Manolo es de 140° . ¿A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿Y Manolo?

Solución:

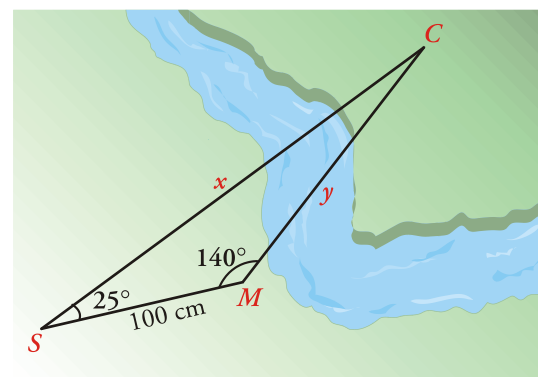
El ángulo \hat{C} será: $\hat{C} = 180^\circ - (25^\circ + 140^\circ) = 15^\circ$

Con el teorema de los senos hallamos los lados x e y :

$$\frac{x}{\sen 140^\circ} = \frac{100}{\sen 15^\circ} \rightarrow x = \frac{100 \sen 140^\circ}{\sen 15^\circ} = 248,35 \text{ m}$$

$$\frac{y}{\sen 25^\circ} = \frac{100}{\sen 15^\circ} \rightarrow y = \frac{100 \sen 25^\circ}{\sen 15^\circ} = 163,29 \text{ m}$$

Por tanto: Sara está a 248,35 m del castillo y Manolo, a 163,29 m.



DEMOSTRAR IGUALDADES TRIGONOMÉTRICAS**EJERCICIO 18 : Demuestra que:**

a)
$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \cos 2x}{\cos x - \frac{1}{2} \sin 2x}$$

b)
$$2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) = 1$$

c)
$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

d)
$$\frac{(\sin x + \cos x) \cdot \cos 2x}{\cos x - \sin x} = 1 + \sin 2x$$

e)
$$\frac{2 \sin x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x$$

Solución:

a)
$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + (1 + \sin x)(1 - \sin x)}{(1 - \sin x) \cos x} = \frac{\cos^2 x + 1 - \sin^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} = \frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \frac{2 \sin x \cos x}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{\cos x - \frac{1}{2} \sin 2x}$$

b)
$$2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \left(\frac{1 + \cos x}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) = 1 + \cos x - \cos x = 1$$

c)

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = (\sin x \cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y) = (\sin x \cos y)^2 - (\cos x \sin y)^2 =$$

$$= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x (1 - \sin^2 y) - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y -$$

$$- (1 - \sin^2 x) \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y$$

d)
$$\frac{(\sin x + \cos x) \cdot \cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\sin x + \cos x) \cdot (\sin x + \cos x) \cdot \cos 2x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} =$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 \cdot \cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) \cdot \cos 2x}{\cos 2x} =$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

e)
$$\frac{2 \sin x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{2 \sin x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{2 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS**EJERCICIO 19 : Resuelve:**

a)
$$\sin(x + 45^\circ) + \sin(x - 45^\circ) = 1$$

b)
$$\sin 2x + \cos x = 0$$

c)
$$\cos x \sin 2x - \sin x = 0$$

d)
$$\cos^3 x - 3 \cos x = 3 \cos x \sin x$$

e)
$$4 \cos 2x = 1 - 3 \cos x$$

f)
$$\sin 2x + \cos 2x - 1 = \cos x - 2 \sin^2 x$$

Solución:

a)
$$\sin(x + 45^\circ) + \sin(x - 45^\circ) = 1 \Rightarrow \sin x \cdot \cos 45^\circ + \cos x \cdot \sin 45^\circ + \sin x \cos 45^\circ - \cos x \sin 45^\circ = 1$$

$$2 \sin x \cos 45^\circ = 1 \Rightarrow 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 135^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \text{donde } k \in \mathbf{Z}$$

b)
$$\sin 2x + \cos x = 0$$

$$2 \sin x \cos x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2 \sin x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360k \\ x = 270^\circ + 360k \end{cases} \\ 2\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \text{ donde } k \in \mathbf{Z}$$

$$c) \cos x \sin 2x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot 2\sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Por tanto, las soluciones son: } \begin{matrix} x = 0^\circ + 360^\circ k & x = 45^\circ + 360^\circ k & x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k & x = 315^\circ + 360^\circ k & x = 225^\circ + 360^\circ k \end{matrix}$$

donde $k \in \mathbf{Z}$.

$$d) \cos^3 x - 3\cos x = 3\cos x \sin x \Rightarrow \cos^3 x - 3\cos x - 3\cos x \sin x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 3 - 3\sin x) = 0$$

$$\cos x (1 - \sin^2 x - 3 - 3\sin x) = 0 \Rightarrow \cos x (-\sin^2 x - 3\sin x - 2) = 0 \Rightarrow -\cos x (\sin^2 x + 3\sin x + 2) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} -1 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\sin x = -1 \rightarrow x = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{Por tanto las soluciones son: } \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \text{ siendo } k \in \mathbf{Z}$$

$$e) 4\cos 2x = 1 - 3\cos x \Rightarrow 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - 3\cos x \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\sin^2 x = 1 - 3\cos x$$

$$4\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 - 3\cos x \Rightarrow 4\cos^2 x - 4 + 4\cos^2 x = 1 - 3\cos x \Rightarrow 8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} \frac{5}{8} \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{5}{8} \rightarrow \begin{cases} x = 51^\circ 19' 4'' + 360^\circ k \\ x = 308^\circ 40' 56'' + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \text{ siendo } k \in \mathbf{Z}$$

$$f) \sin 2x + \cos 2x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$$

$$2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1 - \cos x + 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 1 - \cos x = 0$$

$$2\sin x \cos x + 1 - 1 - \cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2\sin x - 1) = 0$$

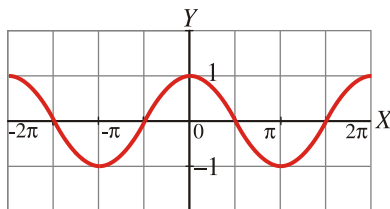
$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ 2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \text{ siendo } k \in \mathbf{Z}$$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 20

a) Representa la siguiente función trigonométrica: $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) Escribe la ecuación de la función cuya gráfica es la siguiente:

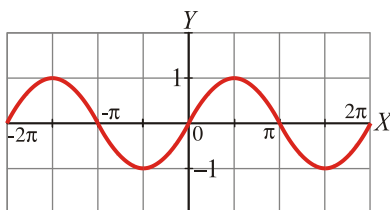


Solución:

a) Hacemos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x - \pi/2$	$-5\pi/2$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos(x - \pi/2)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

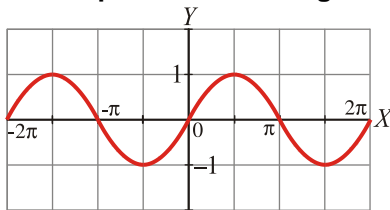
La gráfica sería:



b) La gráfica corresponde a la función $y = \cos x$.

EJERCICIO 21

a) Escribe la ecuación de la función correspondiente a esta gráfica:



b) Representa la siguiente función: $y = \cos(x + \pi)$

Solución:

a) La gráfica corresponde a la función $y = \cos(x + \pi)$.

b) Hacemos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x + \pi$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
$y = \cos(x + \pi)$	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1

La gráfica sería:

